

УДК 534.1

ВРАХУВАННЯ ЕФЕКТУ ВІДБИТТЯ ХВИЛЬ ВІД ПЕРЕШКОДИ ПРИ ПОБУДОВІ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНИХ ГАСНИКІВ ВІБРАЦІЇ РОБОЧИХ ОРГАНІВ МАШИН

© В. С. Ловейкін, д.т.н., професор, Ю. В. Човнюк, к.т.н.,
доцент, О. Ю. Костина, аспірантка, А. В. Яворська,
аспірантка, Національний університет біоресурсів
і природокористування України, Київ, Україна

Проведен всесторонний динамический анализ эффектов волнообразования и их отражения от препятствия при построении теории оптимальных гасителей вибраций рабочих органов машин различного назначения.

The comprehensive dynamic analysis of effects of wave formation and their reflexion from obstacle is carried out at construction of the theory optimum damper of labour bodies of machineries of different function.

Постановка проблеми

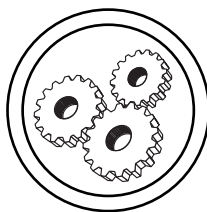
Велика кількість відомих у фізиці хвильових ефектів практично не враховується при аналізі динамічної поведінки пружних систем. Частково це пояснюється тим, що особливості прояву хвильових ефектів у ситуаціях, типових для динаміки машин, залишаються невивченими. Іншими словами, відсутня культура знань про хвилі у застосуванні до задач машинобудування. Корисність таких знань для розв'язку технічних проблем продемонстрована нижче на ряді конкретних прикладів. Зокрема, аналіз відбитих хвиль від закріплень, з однієї сторони, вказує шляхи побудови оптимальних гасників вібрації, а з іншої — дозволяє визначити причини нестійкості систем з конвекцією і у деяких випадках розвинути теорію їх прогнозування.

Аналіз попередніх досліджень

У роботах [1—7] проведений всебічний аналіз відбитих хвиль від закріплень, проте лише у [6] наведені методи оптимізації крутильних коливань у трансмісіях, які максимально швидко згасають. У даній роботі запропоновані підходи, що дозволяють оптимізувати параметри гасників вібрації робочих органів машин з урахуванням ефектів хвилеутворень (різних видів) у межах моделей систем з розподіленими параметрами, які підтримують вказані хвилеутворення.

Мета роботи

Встановлення оптимальних параметрів гасників вібрації робочих органів машин, де враховані ефекти відбиття хвиль від перешкоди та інші явища, що супроводжують хвилеутворення у подібних системах.



МАШИНИ І АВТОМАТИЗОВАНІ КОМПЛЕКСИ

Результати проведених досліджень

При аналізі відбиття хвиль різного виду від закріплень виникає можливість побудови елементів і основних засад теорії оптимальних гасників вібрацій робочих органів машин різноманітного призначення.

1. *Оптимальний гасник поздовжніх коливань стрижня.*

Поздовжні коливання стрижня описується хвильовим рівнянням

$$\begin{aligned} u_{tt} - C_{11}^2 u_{xx} &= 0, \quad u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \\ u_{tt} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u_{xx} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

де $u(x, t)$ — поздовжнє відхилення перерізу стрижня, яке є функцією поздовжньої координати x (вздовж вісі стрижня) та часу t ; $C_{11} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ — швидкість розповсюдження поздовжніх хвиль; E — модуль (матеріалу стрижня) Юнга; ρ — питома щільність матеріалу стрижня. Розв'язок хвильового рівняння у загальному виді можна подати у вигляді суперпозиції двох біжучих у протилежних напрямках хвиль:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f\left(t - \frac{x}{C_{11}}\right) + \\ &+ g\left(t + \frac{x}{C_{11}}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Ці хвилі зв'язані між собою за допомогою граничних умов. У випадку закріплення, яке харак-

теризується масою m , жорсткістю k і коефіцієнтом в'язкості α , маємо

$$ES \cdot u_x + m\ddot{u} + \alpha \cdot \dot{u} + ku \Big|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

де S — площа поперечного перерізу стрижня/закріплення,

$\ddot{u} \equiv \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$. Звідси, використовуючи (2), знаходимо зв'язок між падаючою на закріплення

$f\left(t - \frac{x}{C_{11}}\right)$ й відбитою від нього

$g\left(t + \frac{x}{C_{11}}\right)$ хвилями:

$$\begin{aligned} m\ddot{g}(t) + (\alpha + S \cdot \sqrt{E\rho}) \cdot \dot{g}(t) + \\ + k \cdot g(t) = -m \cdot \ddot{f}(t) + \\ + (\alpha - S \cdot \sqrt{E\rho}) \cdot \dot{f}(t) + kf(t). \end{aligned} \quad (4)$$

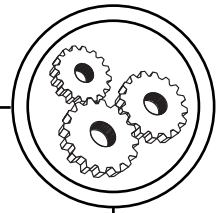
Задаємось метою знайти параметри закріплення, при яких відбита хвиля не виникає. З (4) впливає, що параметри такого закріплення, тобто оптимального гасника поздовжніх коливань, такі:

$$\begin{aligned} m &= k = 0, \\ \alpha &= S \cdot \sqrt{E\rho}. \end{aligned} \quad (5)$$

2. *Оптимальний гасник згинних коливань балки на пружній основі з натягом.*

Розглянемо задачу про оптимальний гасник згинних коливань балки на пружній основі з натягом. У випадку моделі Тимошенко поперечне відхилення серединної лінії балки $u(x, t)$ та кут повороту її перерізу $\varphi(x, t)$ описується системою рівнянь

МАШИНИ І АВТОМАТИЗОВАНІ КОМПЛЕКСИ



$$\begin{cases} (N + \tilde{k} \cdot G \cdot S) \cdot u_{xx} - \\ -\rho S \cdot u_{tt} - h \cdot u - \\ -\tilde{k} \cdot G \cdot S \cdot \varphi_x = 0, \\ I \cdot E \cdot \varphi_{xx} - \rho \cdot I \cdot \varphi_{tt} - \\ -\tilde{k} \cdot G \cdot S' \cdot \varphi + \\ +\tilde{k} \cdot G \cdot S \cdot u_x = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Тут N — натяг; G — модуль зсуву; I — момент інерції перерізу щодо повороту; h — жорсткість пружної основи; \tilde{k} — коефіцієнт Тимошенко. Вважаючи балку напівнескінченною ($-\infty < x < 0$), умови на її торці запишемо у вигляді:

$$\begin{cases} (N + \tilde{k} \cdot G \cdot S) \cdot u_x - \\ -\tilde{k} \cdot G \cdot S \cdot \varphi + \\ +m \cdot \ddot{u} + \alpha \cdot \dot{u} + ku \Big|_{x=0} = 0, \\ I \cdot E \cdot \varphi_x + I_0 \cdot \ddot{\varphi} + \\ +\beta \cdot \dot{\varphi} + G_0 \cdot \varphi \Big|_{x=0} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

де m , I_0 , k , G , α та β — параметри, які характеризують інерційність, пружність і в'язкість закріплення.

Для однозначного розв'язку задачі необхідно ще задавати умову при $x \rightarrow -\infty$. Будемо вважати, що на нескінченності задане джерело частоти ω , яке посилає енергію згинній хвилі:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)}, \\ \varphi &= \varphi_0 \cdot e^{i(\omega t - kx)}. \end{aligned} \quad (8)$$

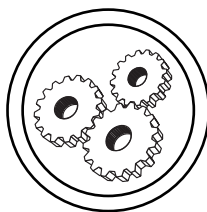
Амплітуди u_0 та φ_0 , а також частота ω і хвильове число k зв'язані між собою за допомогою співвідношень (6).

Причому для останніх, згідно (6), отримуємо так зване дисперсійне рівняння:

$$\begin{cases} C_{11}^2 \cdot (C_1^2 + C_0^2) k^4 - \\ - (C_1^2 + C_0^2 + C_{11}^2) \omega^2 \cdot \\ \cdot k^2 + \omega^4 + (\omega^2 C_0^2 + \omega_1^2 C_{11}^2) \cdot \\ \cdot k^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2) \omega^2 + \\ + \omega_1^2 \cdot \omega_2^2 = 0, \\ C_{11} = \sqrt{E/\rho}, \\ C_1 = \sqrt{(\tilde{k} \cdot G)/\rho}, \\ C_0 = \sqrt{N/(\rho \cdot S)}, \\ \omega_1 = \sqrt{h/(\rho \cdot S)}, \\ \omega_2 = C_{11} \sqrt{E/I_0}. \end{cases} \quad (9)$$

З аналізу дисперсійного рівняння (9) випливає, що якщо частота джерела $\omega < \omega_1$, тоді хвиля не буде споживати енергію (k — уявні). При $\omega_2 > \omega > \omega_1$ джерело надає енергію одній хвилі й одній спадаючій вповдовж $+x$ за експонентою осциляції. Коли $\omega > \omega_2$, джерело може надати енергію двом хвилям.

Практичний інтерес зазвичай представляє інший випадок ($\omega_2 > \omega > \omega_1$), коли згинні хвилі розповсюджуються вповдовж балки, але їх частоти досить низькі, тому довжини хвиль набагато більше поперечних розмірів балки. У цьому випадку падаюча хвиля при взаємодії з закріпленням породжує одну відбиту хвилю і одну спадаючу вповдовж $-x$ за експонентою осциляцію, амплітуди котрих при ідеальному узгодженні балки з закріпленням будуть дорівнювати нулю. Отже, умова на параметри оптимального гасника може бути отримана шляхом підстановки падаючої хвилі (8) у співвідношення (7):



МАШИНИ І АВТОМАТИЗОВАНІ КОМПЛЕКСИ

$$\begin{cases} \omega_1^2 - \omega^2 + \gamma\omega k = 0, \\ \mu\omega^2 - \xi = 0; \\ \left[\omega_1^2 - \omega^2 + k(C_1^2 + C_0^2) \right] \cdot \\ \cdot \left(\frac{\eta}{C_{11}^2} \cdot \omega^2 - \varsigma \right) = 0; \\ \left[\omega_1^2 - \omega^2 + k(C_1^2 + C_0^2) \right] \cdot \\ \cdot (k - \delta\omega) = 0; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m}{\rho S}, \eta = \frac{I_0}{I \rho}, \\ \text{У (10)} \quad \xi &= \frac{k}{\rho S}, \varsigma = \frac{G_0}{I \cdot E}, \\ \gamma &= \frac{\alpha}{\rho S}, \delta = \frac{\beta}{IE}. \end{aligned}$$

Звідси із врахуванням (9) знаходимо шукані параметри оптимального гасника:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega^2 - \omega_1^2}{\omega k} \cdot \rho S, \\ \beta &= IE \cdot \frac{k}{\omega}, \end{aligned} \quad (11)$$

$m = k = 0$ (або $m/k = \omega^2$), $I_0 = G_0 = 0$ (або $I_0/G_0 = \omega^2$), причому

$$\begin{aligned} k &= \left[\frac{(B + \sqrt{B^2 + D^2})}{(C_0^2 + C_1^2)} \right]^{1/2} \cdot C_{11}, \\ B &= \frac{1}{2} \left[\frac{(C_1^2 + C_0^2 + C_{11}^2)\omega^2 -}{-(\omega_2^2 \cdot C_0^2 + \omega_1^2 \cdot C_{11}^2)} \right], \\ D &= C_{11}^2 \cdot (C_0^2 + C_1^2) \left[\frac{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{(\omega^2 - \omega^4 - \omega_2^2 \omega^2)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

У діапазоні низьких частот ($\omega \ll \omega^2$), коли швидкості розповсюдження згинних хвиль набагато менше швидкостей розповсюдження поздовжніх і зсувних хвиль:

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k} \ll C_1, C_{11}, \\ k = C_{11}^{-1} \cdot \omega_2^2 \cdot \left[\frac{-C_0^2 \omega^2 + \sqrt{C_0^2 \omega_2^2 + 4C_{11}^2} + \sqrt{(C_1^2 + C_0^2)(\omega^2 - \omega_1^2)}}{2(C_1^2 + C_0^2)} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

У цьому наближенні у відсутності натягу ($C_0 = 0$) й пружної основи ($\omega_1 = 0$), тобто для моделі балки Бернуллі-Ейлера,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m}{\rho S}, \eta = \frac{I_0}{I \rho}, \\ \xi &= \frac{k}{\rho S}, \varsigma = \frac{G_0}{I \cdot E}, \\ \gamma &= \frac{\alpha}{\rho S}, \delta = \frac{\beta}{IE}. \end{aligned} \quad (14)$$

і, відповідно,

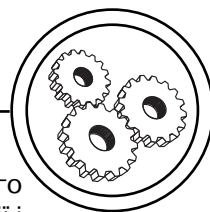
$$\begin{aligned} \alpha &= \rho S \cdot \left(\frac{IE}{\rho S} \right)^{1/4} \cdot \omega^{1/2}, \\ \beta &= IE \cdot \left(\frac{\rho S}{IE} \right)^{1/4} \cdot \omega^{-1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

При достатньо великому натягу для $\omega \ll (C_0^2 \omega_2 / C_1 C_1)$ ($C_0 < C_1, C_{11}$), тобто у випадку струнної моделі при $\omega_1 = 0$, $k = \omega / C_0$ з (11) знайдемо, що $\alpha = \sqrt{N \cdot \rho \cdot S}$. Цей результат аналогічний отриманому вище для поздовжніх хвиль у однорідному стрижні.

3. Оптимальний гасник крутильних коливань у трансмісіях.

Аналіз однократного відбиття хвиль від границь системи дозволяє знайти параметри оптимальних гасників і для однорідних дискретних структур. Розглянемо задачу про оптимальний гасник крутильних коливань у трансмісіях.

МАШИНИ І АВТОМАТИЗОВАНІ КОМПЛЕКСИ



Якщо трансмісія складається з довільного числа пружних та інерційних елементів, тоді для дослідження крутильних коливань її зручно замінити еквівалентною механічною моделлю, яка складається з пружного валу, на котрому закріплені зосереджені маси. Коливання такої системи визначається значеннями приведених моментів інерції мас I_m відносно вісі валу і жорсткостями $C_{m-1, m}$, $C_{m, m+1}$ ділянок валу між дисками ($m = 1, 2, \dots, N$).

Величини приведених моментів інерції і жорсткостей визначаються з умови рівності кінетичної і потенціальної енергії реальної трансмісії і приведеної системи.

Бажано, щоб приведена система була однорідною, оскільки у цьому випадку внутрішніх резонансів немає і, відповідно, динамічні навантаження розподілені впродовж трансмісії рівномірно. Тому, вважаючи у подальшому $I_m = I$ й $C_m = C$, отримаємо таку систему рівнянь руху:

$$\begin{cases} I_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 + C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) + \\ + \mu_1 \cdot \dot{\varphi}_1 = 0, \\ I \cdot \ddot{\varphi}_m + C \cdot (\varphi_m - \varphi_{m-1}) + \\ + C \cdot (\varphi_m - \varphi_{m+1}) = 0, \\ m = 2, 3, \dots, N, \end{cases} \quad (16)$$

де $\varphi_m(t)$ — кут повороту m -го диску; I_1 та μ_1 — момент інерції і коефіцієнт в'язких втрат гасника крутильних коливань.

Для відшукування параметрів оптимального гасника достатньо розглянути задачу про коливання напівнескінченного ланцюга дисків ($N \rightarrow \infty$) з гасником на кінці (рис.).

Будемо вважати, що на нескінченності знаходиться джерело збурень, яке створює хвилю, що біжить по ланцюгу дисків вліво: $\varphi_m^{\text{пад}} = A \cdot \exp[i(\omega t + km)]$.

Хвиля збурення після взаємодії з гасником відбивається від нього і розповсюджується по системі вправо:

$$\varphi_m^{\text{відб}} = B \cdot \exp[i(\omega t - km)].$$

Таким чином, рух m -го диску можна подати у вигляді суми цих хвиль. Підставляючи її у (16), знаходимо зв'язок між амплітудами падаючої і відбитої хвиль:

$$A \cdot e^{ik}(I_1 \cdot \omega^2 + C - C \cdot e^{ik} + i \cdot \mu_1 \cdot \omega) + B \cdot e^{-ik}(-I_1 \cdot \omega^2 + C - C \cdot e^{-ik} + i \cdot \mu_1 \cdot \omega) = 0, \quad (17)$$

а також отримуємо дисперсійне рівняння, яке зв'яже частоту ω та хвильовий вектор / хвильове число k :

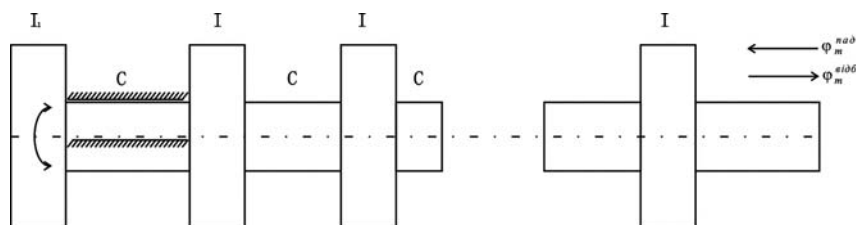
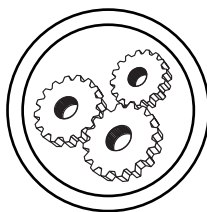


Схема оптимального гасника крутильних коливань



МАШИНИ І АВТОМАТИЗОВАНІ КОМПЛЕКСИ

$$l\omega^2 = 2C \cdot (1 - \cos k). \quad (18)$$

З дисперсійного рівняння видно, що смуга пропускання однорідного ланцюга обмежена: $0 < \omega < 2\sqrt{\frac{C}{l}}$. У вказаному діапазоні частот:

$$\frac{B}{A} = e^{i2k} \cdot \frac{(z_0 - z)}{(z_0 + z)},$$

$$z = \mu + i \cdot \left(l_1 - \frac{l}{2} \right) \cdot \omega, \quad (19)$$

$$z_0 = \sqrt{l \cdot \left(C - \frac{l\omega^2}{4} \right)}.$$

Отже, для оптимального гасіння ($B/A = 0$) необхідно одночасно задовольнити двом умовам:

$$l_1 = \frac{l}{2},$$

$$\mu_1 = \sqrt{l \cdot \left(C - \frac{l\omega^2}{4} \right)}. \quad (20)$$

4. Подвійний ефект Доплера.

При відбитті хвиль від рухомої перешкоди спостерігається так званий подвійний ефект Доплера, який полягає у зміщенні частоти хвиль. Цей ефект супроводжується зміною величини енергії, яку переносить хвиля. Якщо хвиля і перешкода рухаються назустріч одна одній, тоді енергія хвилі буде збільшуватись, у протилежному випадку — зменшуватись.

Розглянемо задачу про поперечні коливання нескінченної струни, вповдовж якої рівномірно переміщуються притискуючи валки. Вважаючи таке закріплення абсолютно жорстким і падаючу хвилю заданою:

$$u^{\text{пад}} = u_0 \cdot \cos(\omega t - kx),$$

$$k = \frac{\omega}{C}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \quad (21)$$

з хвильового рівняння:

$$u_{tt} - C_0^2 \cdot u_{xx} = 0 \quad (22)$$

і умов на рухомій границі

$$u|_{x=vt} = 0, \quad v = \text{const} < C_0, \quad (23)$$

знаходимо зв'язок відбитої хвилі $g(t + x/C_0)$ з падаючою

$$u_0 \cdot \cos[\omega t(1 - \beta)] +$$

$$+ g[t(1 + \beta)] =, \quad (24)$$

$$\beta = \frac{v}{C_0}.$$

Розуміючи далі під $t(1 + \beta)$ аргумент відбитої хвилі $t + \frac{x}{C_0}$, знаходимо:

$$u^{\text{відб.}} = g\left(t + \frac{x}{C_0}\right) =$$

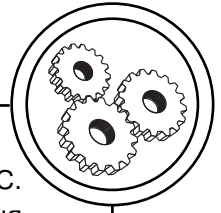
$$= -u_0 \cdot \cos(\omega_r \cdot t + k_r x), \quad (25)$$

$$k_r = \frac{\omega_r}{C_0}, \quad \omega_r = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \omega.$$

Після відбиття хвиля залишилась гармонічною і її амплітуда не змінилась. Перетворення звелось лише до зміни частоти за законом подвійного ефекту Доплера, згідно з яким частота збільшується при русі границі назустріч хвилі ($v < 0$) і зменшується, якщо хвиля і границі рухаються у одному напрямку ($v > 0$).

Зміна частоти супроводжується й зміною щільності енергії, яку переносить хвиля:

МАШИНИ І АВТОМАТИЗОВАНІ КОМПЛЕКСИ



$$h_{\text{пад.}} = \frac{\rho}{2} \cdot (u_t^{\text{пад.}})^2 + \frac{N}{2} \cdot (u_x^{\text{пад.}})^2 = \rho \cdot \omega^2 \cdot u_0^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx). \quad (26)$$

$$h_{\text{відб.}} = \rho \cdot \omega_r^2 \cdot u_0^2 \cdot \sin^2(\omega t + kx) = \rho \cdot \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 \cdot \omega^2 \cdot u_0^2 \cdot \sin^2(\omega t + kx). \quad (27)$$

Отже, $\frac{h_{\text{пад.}}}{\omega^2} = \frac{h_{\text{відб.}}}{\omega_r^2}$, або

$$h_{\text{відб.}} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^2 \cdot h_{\text{пад.}} \quad (28)$$

Знайдена зміна щільності енергії відбувається не тільки у результаті здійснення над хвилюю роботи зі сторони сил, які переміщують границю, але і за рахунок стиснення хвиль. Для пояснення вказаного розглянемо падіння на границю хвилі, яка складається зі скінченного числа періодів і має довжину l_0 . Час взаємодії τ зв'язаний з l

співвідношенням $\tau = (l_0 + v\tau)/C$. Просторова довжина збурення

після взаємодії $l_{\text{відб.}} = \frac{(C+v)}{\tau}$.

Виключаючи з цих співвідношень τ , отримуємо:

$$\frac{l_{\text{відб.}}}{l_0} = \frac{\omega}{\omega_r} = \frac{1+\beta}{1-\beta}. \quad (29)$$

У зв'язку з цим відношення енергії хвилі ($\varepsilon = h \cdot l$) до її частоти у результаті взаємодії з рухомою границею не змінюється:

$$\frac{\varepsilon_{\text{відб.}}}{\omega_r} = \frac{\varepsilon_{\text{пад.}}}{\omega} = \text{const}. \quad (30)$$

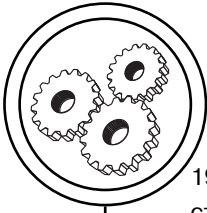
це означає збереження кількості квантів хвильової енергії.

Висновки

1. Проведений всебічний динамічний аналіз ефекту відбиття хвиль від перешкоди і встановлені основні їх кінематичні параметри.

2. Отримані у роботі результати можуть стати у подальшому у нагоді для конструювання оптимальних гасників вібрацій робочих органів машин різноманітного призначення.

1. Горошко О. А. Критические случаи движения стержня с демпфером на конце / О. А. Горошко // Прикладная механика. — 1978. — Т. 14. — № 8. — С. 129—132. 2. Весницкий А. И. К построению демпфера изгибных колебаний балки / А. И. Весницкий, Н. Д. Романов // Прикладная механика. — 1988. — Т. 24. — № 6. — С. 122—124. 3. Весницкий А. И. К вопросу о граничных условиях в задачах динамики волновых систем с движущимися закреплениями и нагрузками / А. И. Весницкий, Г. А. Уткин // Волны и дифракция. — 1981. — Вып. 1. — С. 365—368. 4. Весницкий А. И. Граничные условия для изгибных колебаний балки с движущимся упруго-инерциальным закреплением / А. И. Весницкий, В. Н. Мангова // Доклады АН УССР. —



МАШИНИ І АВТОМАТИЗОВАНІ КОМПЛЕКСИ

1982. — № 5. — С. 33—35. 5. Мангова В. Н. О поперечних колебаниях стержня с движущимся жёстким закреплением / В. Н. Мангова // Прикладная механика. — 1981. — Т. 16. — № 12. — С. 126—129. 6. Весницкий А. И. Оптимальное гашение крутильных колебаний в трансмиссиях / А. И. Весницкий, В. М. Зябликов, И. В. Милосердова, В. Ф. Смирнов // Известия вузов. — Машиностроение. — 1989. — № 5. — С. 72—76. 7. Зябликов В. М. Уменьшение динамических нагрузок в крутильных системах согласованием импедансов / В. М. Зябликов, В. Ф. Смирнов // Известия вузов. — Машиностроение. — 1985. — № 9. — С. 82—87.

Рецензент — О. М. Величко,
д.т.н., профессор, НТУУ «КПІ»

Надійшла до редакції 14.04.10