

**ВДОСКОНАЛЕННЯ МЕТОДІВ
ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНО-ІНЕРЦІЙНИХ
ТА КІНЕМАТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СИСТЕМ
З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ**

© В. С. Ловейкін, д.т.н. професор, Ю. В. Човнюк, к.т.н., доцент, Л. А. Дяченко, здобувач, Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна

Исследованы колебания (свободные) тонкого диска. Определены соотношения для толстых дисков, которые учитывают инерцию вращения и смещение. Построены зависимости резонансной частоты колебаний диска с узловыми кругами.

Free vibrations of the thin disc are studied. The equation for thick discs which include the inertia of rotation and the slide is determined. The dependencies of the resonant frequency of oscillation with knotty circles are made.

Постановка проблеми

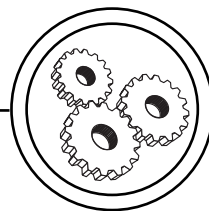
При взаємодії робочих органів сільськогосподарських машин з оброблюваними матеріалами та середовищами зазвичай необхідно визначити механічні властивості останніх, а саме: 1) резонансні частоти коливань (різних видів); 2) розподіл переміщень; 3) еквівалентні маси (матеріалів, середовищ, що розглядаються як системи з розподіленими параметрами); 4) пружні та в'язкі характеристики та ін. При цьому можна використати для підрахунку й кількісної оцінки вказаних вище механічних величин амплітудно-частотні характеристики вільних коливань таких систем.

Для коректного розв'язку подібних задач необхідно чітко визначити, які частини дискретно-континуальних систем підтримують вільні коливання певної резонансної частоти й просторової форми, що відповідає кон-

кретним граничним умовам. Слід зазначити, що при цьому кількісна оцінка масових (інерційних) еквівалентних характеристик суттєво впливає у подальших розрахунках власних коливань дискретно-континуальних систем, до складу котрих входять також й інерційні характеристики самого вимірювального приладу (датчика). Аналіз саме власних коливань таких систем, їх амплітудно-частотних характеристик дозволить визначити і їх пружно-в'язкі параметри.

Аналіз попередніх досліджень

У роботі [1] наведена методика визначення пружних властивостей матеріалу стрижня, яка заснована на обробці результатів вимірювання послідовних амплітуд коливань (змінних) даного стрижня. Проте автори цитованої роботи визначають



приведену масу стрижня, який здійснює змінні коливання, використовуючи рівняння вигнутої лінії й тим самим ігнорують інші форми й частоти коливань такої системи, котрі, безумовно, справляють свій суттєвий вплив на величину еквівалентної маси системи. На думку авторів даного дослідження, підхід роботи [1] не зовсім послідовний і у певному сенсі некоректний, оскільки не дозволяє врахувати вплив на інерційні властивості дискретно-континуальних систем інших мод коливань, форм і видів (зв'язаних) коливань, а тому вимагає доопрацювання, уточнення і подальшого узагальнення з метою залучення його для використання у інженерних методах розрахунку основних механічних властивостей оброблюваних матеріалів та середовищ, взаємодіючих з робочими органами сільськогосподарських машин.

У даній роботі запропонований універсальний підхід та методика розрахунку основних механічних характеристик дискретно-континуальних систем за різноманітних видів коливань, які виникають у результаті вказаної взаємодії.

Мета роботи

Встановлення співвідношень, які зв'язують між собою геометричні параметри системи з її пружними та в'язкими властивостями, масою вимірювального датчика (приладу), у котрому виникають власні коливання певної інтенсивності за тих чи інших початкових та граничних умов.

Результати проведених досліджень

Кожна дискретно-континуальна система, яка моделює взаємодію робочого органу сільськогосподарської машини певного призначення з оброблюваним матеріалом (середовищем), по своїй суті є механічним резонатором. У якості прикладу книга Релея «Теорія звуку», яка написана біля 100 років назад до сих пір залишається прекрасним джерелом матеріалу щодо коливань тонких смуг та стрижнів, а також тонких пластин та дисків [2]. Отже, ми не просто будували нову теорію у цій частині, але поглянемо на роботи, які виконані за останні 100 років, що мають відношення до механічних резонаторів. Особливу увагу ми приділимо наступним типам резонаторів:

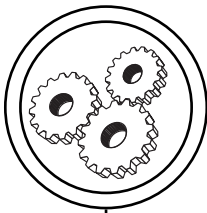
1) тілам, у котрих один розмір значно більший чи менший двох інших розмірів;

2) товстим тілам, у котрих хвильовий рух більш складний, ніж у простих поздовжніх, крутих, змінних чи раціональних видах коливань.

Дискові резонатори зі згінними коливаннями

Дослідження коливань (вільних) тонкого диску значно складніше дослідження бруска з коливаннями типу згінних. Додаткова складність зв'язана у основному із задоволенням граничних умов. Проведемо аналіз у першому наближенні й приведемо найбільш важливі результати.

Хвильове рівняння у прямокутних координатах має похідні по x та y і по часу t :



$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial t^2} \quad (1)$$

де квадрат швидкості розповсюдження хвиль

$$c^2 = E \cdot \frac{\Delta^2}{[12\rho \cdot (1-\mu^2)]} \quad (2)$$

і де Δ — товщина диску, а U — переміщення у напрямку вісі z ; E — модуль пружності матеріалу диска; ρ — густина матеріалу диска; μ — коефіцієнт Пуассона.

Виключаючи залежність від часу (1) і перетворюючи, отримаємо рівняння:

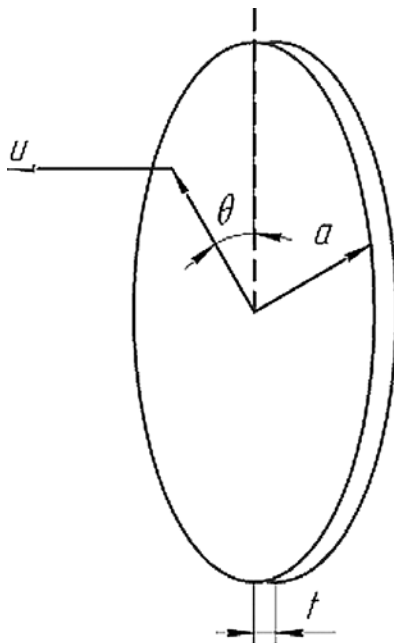


Рис. 1. Дисковий резонатор змінних коливань

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \mp k^2 \cdot U = 0, \quad (3)$$

де постійна розповсюдження змінних коливань k зв'язана з частотою та швидкістю розповсюдження співвідношенням:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (4)$$

Можна простіше отримати розв'язок за допомогою перетворення до циліндричних координат. Рівняння (3) перетворюється до виду:

$$r^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \pm k^2 \cdot r^2 U = 0, \quad (5)$$

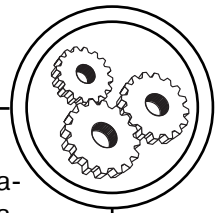
де r — радіальна відстань від центру диску і θ — відстань по куту, показані на рис. 1.

Розв'язок рівняння (5) можна записати у виді добутку двох розв'язків: X , котрий залежить тільки від r , та ψ , котрий залежить тільки від θ . Отже, $U(r, \theta) = X(r) \cdot \psi(\theta)$. Використовуючи цей розв'язок стосовно (5), можемо записати три звичайних диференціальних рівняння:

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial X}{\partial r} \pm \left(k^2 \mp \frac{n^2}{r^2} \right) \cdot X = 0; \quad (6)$$

$$\left(\frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} \right) + n^2 \cdot \Psi = 0, \quad (7)$$

де n — ціле число.



Розв'язками (6) є функції Бесселя, у той час як розв'язками (7) є тригонометричні функції. Виключаючи функції, які перетворюються у нескінченність при $r = 0$, можемо записати розв'язок у виді:

$$U(r, \theta) = X(r) \cdot \psi(\theta) = [A \cdot I_n(kr) + B I_n(kr)] \cdot \cos(n\theta), \quad (8)$$

де n — число вузлових діаметрів, і функції Бесселя визначаються як $I_n(kr) = i^{-n} \cdot (I_n(ikr))$, $i^2 = -1$.

Постійна розповсюдження k має різну величину для кожного набору вузлових діаметрів та вузлових кіл S . Ескізи чотирьох найнижчих видів коливань показані на рис. 2. Затемнені ділянки представляють для прикладу рух від поверхні рисунку, у той час як чисті ділянки представляють рух у протилежному напрямку.

Наступний крок полягає у накладанні граничних умов на загальний розв'язок (8). У зв'язку зі складністю обчислень просто запишемо результати, отримані Релеєм [2]. При $n = 0$ (немає вузлових діаметрів).

$$\begin{bmatrix} I_1(ka) & ; & I_1(ka) & ; \\ (\mu-1) \cdot I_1(ka) + ka \cdot I_0(ka); & -(\mu-1) \cdot I_1(ka) + ka \cdot I_0(ka); \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0. \quad (9)$$

Прирівнюючи нулю визначник матриці, стримаємо частотне рівняння:

$$2 \cdot (\mu-1) + \left[ka \cdot \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} + \frac{I_0(ka)}{I_1(ka)} \right] = 0. \quad (10)$$

Корені цього частотного рівняння по суті є функціями коефіцієнта Пуассона m ; цього не спостерігають у розв'язках для тонких

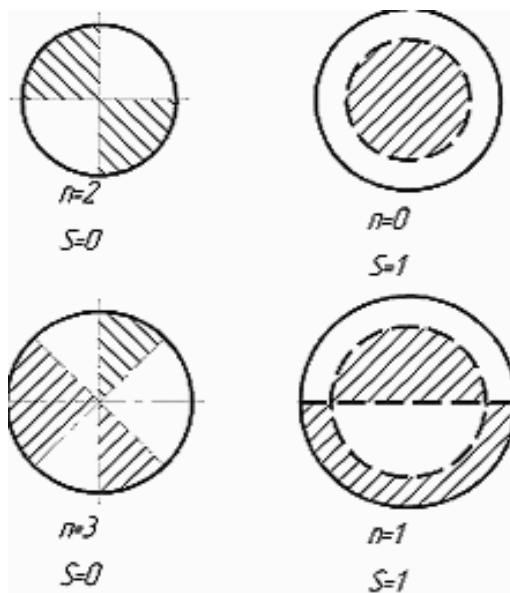
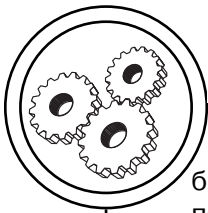


Рис. 2. Чотири перших згінних види коливань диску. Штрихові вузлові лінії відділяють район синфазних та протифазних коливань



брусків та стрижнів, де ефекти, пов'язані з поперечними розмірами, виключені. Корені ка для двох значень коефіцієнта Пуассона 0,2 та 1/3 й для видів коливань з числом вузлових кіл, рівним 1 та 2 ($S = 1$ й $S = 2$), дорівнюють $k_a = 2,97$ ($\mu = 0,2; S = 1$); $k_a = 6,18$ ($\mu = 0,2; S = 2$); $k_a = 3,01$ ($\mu = 1/3; S = 1$); $k_a = 6,21$ ($\mu = 1/3; S = 2$). Слід зазначити, що у широкому діапазоні змін величин коефіцієнта Пуассона корені k набувають лише дуже невеликих змін.

Частоті рівняння знаходять підстановкою швидкості змінних коливань пластини з співвідношення (2) у дисперсійне рівняння (4), що дає:

$$\omega_s = 2 \cdot (ka)_s^2 \cdot \frac{\tilde{\Delta}}{d^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{3\rho \cdot (1-\mu^2)}} \quad (11)$$

Резонансну частоту для коливань з конкретним числом вузлових кіл $S = 1, 2, 3, \dots$ можна розрахувати підстановкою коренів $(ka)_s$ у (11).

Амплітуди, які визначають розподіл переміщень для видів коливань з вузловими колам, можна знайти за допомогою запису першого рівня (9) у вигляді:

$A/B = -I_1(ka) / I_1(ka)$ і підстановки отриманого відношення у (8), котре у випадку $n = 0$ (немає вузлових діаметрів) приймає вид:

$$U(r) = A \cdot I_0(kr) + B \cdot I_0(kr) \quad (12)$$

Відповідно,

$$U(r)_s = B \cdot \left[I_0(kr) - \frac{I_1(ka)_s}{I_1(ka)_s} I_0(kr) \right], \quad (13)$$

де B — просто амплітудний множник і

$$kr = (r/a) \cdot (ka)_s \quad (14)$$

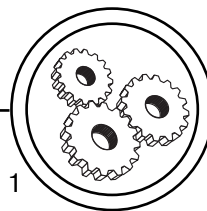
У табл. 1 приведені амплітудні розподіли у функції відстані від центру диску ($r = 0$) до його краю ($r = a$) для перших двох видів коливань з вузловими колами, отримані з рівняння (13).

Еквівалентна маса тонкого диску може бути точно розрахована інтегруванням квадрату переміщення зі співвідношення (13) або чисельно із застосуванням табл. 1. Результуюче співвідношення для відношення еквівалентної маси до статичної і для $s = 1$ має вид:

$$(M_{\text{екв}}/M_{\text{ст}})_{s=1} = 0,247/[U(r)/U_0(0)]^2 \quad (15)$$

У подальшому ми не будемо розглядати види коливань з вузловими діаметрами і докладемо n , рівним нулю. Більш загальні розв'язки, де задані n та s , виведені Релеєм [2] і вивчались у роботі [6]. У табл. 2 приведені величини ka для видів коливань, які мають до трьох вузлових кіл й до дев'яти вузлових діаметрів. Ці величини можна використати спільно з рівнянням (11) для знаходження власних резонансних частот тонких дисків.

Співвідношення для товстих дисків. Як і у випадку брусків, які коливаються на змінні, рівняння тонких дисків не включають ефектів зсуву та інерції обертання. Досліджуючи осесиметричні (кругові) види коливань, автори роботи [7] включили члени, які описують зсув та інерцію обертання, у свої розв'язки для влас-



Таблиця 1

Відносні переміщення для видів коливань з однією та двома вузловими колами ($\mu = 1/4$)

r/a	S = 1 n = 0	S = 2 n = 0	r/a	S = 1 n = 0	S = 2 n = 0
0,0	+1,000	+1,000	0,6	+0,187	-0,370
0,1	+0,974	+0,907	0,7	-0,045	-0,303
0,2	+0,896	+0,654	0,8	-0,283	-0,109
0,3	+0,771	+0,312	0,9	-0,518	+0,163
0,4	+0,605	-0,026	1,0	-0,748	+0,455
0,5	+0,407	-0,273			

них резонансних частот. У роботі [8] розв'язки доповненні еквівалентною масою, а автори роботи [9] розв'язали задачу для несиметричних видів коливань (які мають вузлові діаметри), включаючи у розв'язок крутильні хвилі. У роботі [10] були визначені розподіли переміщень та еквівалентної маси.

Сукупність нормованих частотних залежностей, представлена на рис. 3 [11]. На них штрихами дана нормована частота ω/ω_0 як функція відношення діаметру до товщини. Коефіцієнт

Пуассона відповідає матеріалу Ni-Span C. Суцільні криві відповідають випадку, коли враховуються інерція обертання і деформація зсуву, і (як і для бруска зі змінними коливаннями) резонансні частоти нижче значень, отриманих за класичною теорією.

$$\omega_0 = \frac{\pi}{e} \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho}}; \quad \mu = 0,312.$$

На рис. 3 ω/ω_0 — нормалізована резонансна частота, d/t — відношення діаметру до товщини.

Таблиця 2

Величина частотної постійної k_a у функції від кількості вузлових кіл та вузлових діаметрів (коефіцієнт Пуассона 1/3)

Число вузлових кіл S	Число вузлових діаметрів n									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			2,29	3,50	4,70	5,66	6,80	7,77	8,93	9,94
1	3,01	4,53	5,94	7,27	8,51	10,42	11,06			
2	6,21	7,74	9,45	10,55						
3	9,34	10,89								

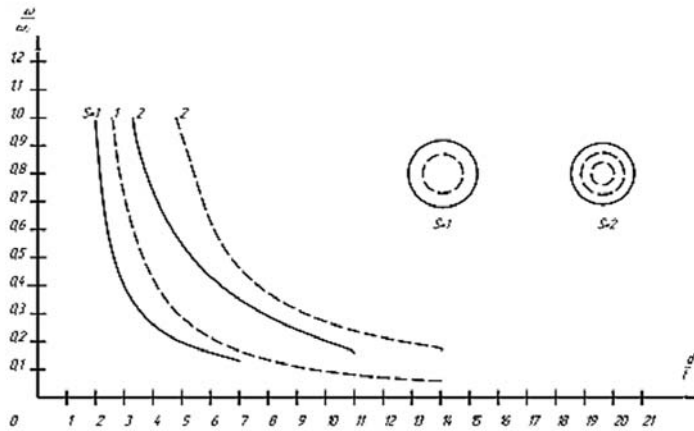
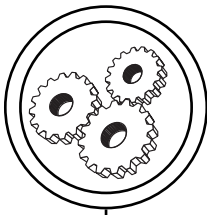


Рис. 3. Залежності резонансної частот коливань диску з вузловими колами, побудовані за співвідношенням (11) (наближення тонкого диску) і за співвідношеннями, які враховують інерцію обертання та зсув (точна теорія) [11]: — точна теорія; ——— теорія тонкого бруска

У товстому диску спостерігається ускладнення руху диска (по суті, резонатора) по мірі того, як його розміри прямують до рівності ($d \rightarrow t$). На рис. 4 поданий ескіз руху диску та переміщень частинок у функції радіального положення r та осьового положення z . Центр системи координат

знаходиться у центрі диску. Така картина у грубому наближенні застосована для всіх змінних видів коливань, які мають вузлові кола. Зазначимо, що радіальні та осьові компоненти переміщень змінюються зі зміною осьового та радіального положення розглядуваної точки. На-

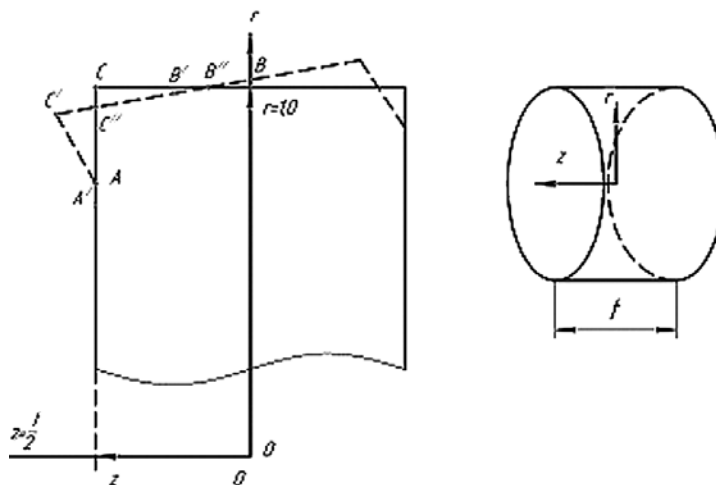
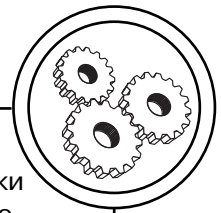


Рис. 4. Переміщення краю диску, який працює на змінному виді коливань з одним вузловим колом



приклад, частинка, яка займає у стані спокою положення А, переміщується тільки у радіальному напрямку до точки А'. Частинка у центрі краю диску В переміщується у напрямку координати z до В', і кут С рухається у напрямку обох координат r та z до точки С'. Слід підкреслити, що, хоча основний рух має осьовий напрямок, переміщення у точці А відбувається у радіальному напрямку.

З розподілу переміщень, аналогічних поданим на рис. 4, ми можемо побудувати графіки еквівалентних мас диску у радіальному і осьовому напрямках, як функцій положення точки на поверхні диску. Графіки еквівалентної маси у точках, які знаходяться на двох поверхнях диску, який коливається на змінному виді коливань з одним вузловим колом ($S = 1, n = 0$), подані на рис. 5 та рис. 6, а на

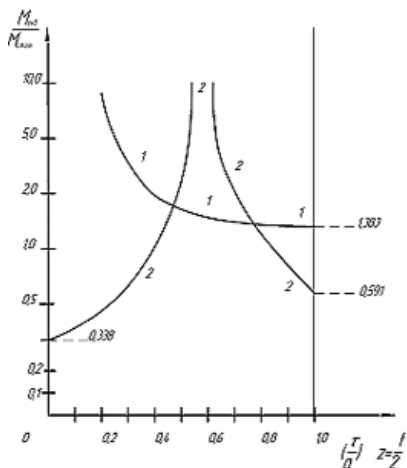


Рис. 5. Еквівалентна маса у радіальному та осьовому напрямках як функція радіального положення точки на поверхні диска

рис. 7 та рис. 8 подані графіки еквівалентної маси відносно точок, які знаходяться на головній поверхні диску ($z = \Delta/2$), як функція r для видів коливань з $s = 2, n = 0$ й для $s = 1, n = 0$ відповідно. Для цих кривих коефіцієнт Пуассона дорівнює 0,3, і відношення діаметру до товщини дорівнює 4/1. Згадуючи, що еквівалентна маса є постійна величина (повна кінетична енергія), поділена на квадрат

швидкості $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, ми зможемо

знайти відносні величини переміщень U_r та U_z із залежності для еквівалентної маси, приведені на рис. 5–8.

Диск працює на коливанні з одним вузловим колом: 1 — r — напрямок; 2 — z — напрямок; $S = 1, n = 0$; $d/t = 4$; $\mu = 0,30$.

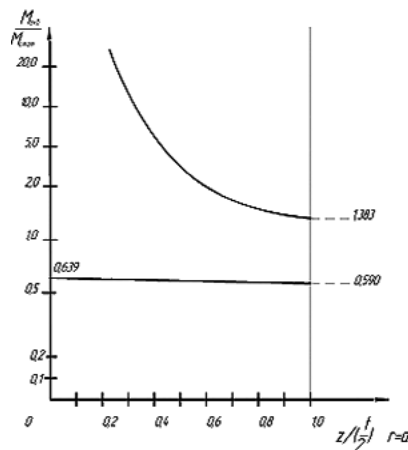


Рис. 6. Еквівалентна маса диску, який працює на коливання з одним вузловим колом, як функція положення у напрямку вісі z та периферійному колу (у радіальному та осьовому напрямках). $S = 1, n = 0$; $t/d = 4$; $\mu = 0,30$

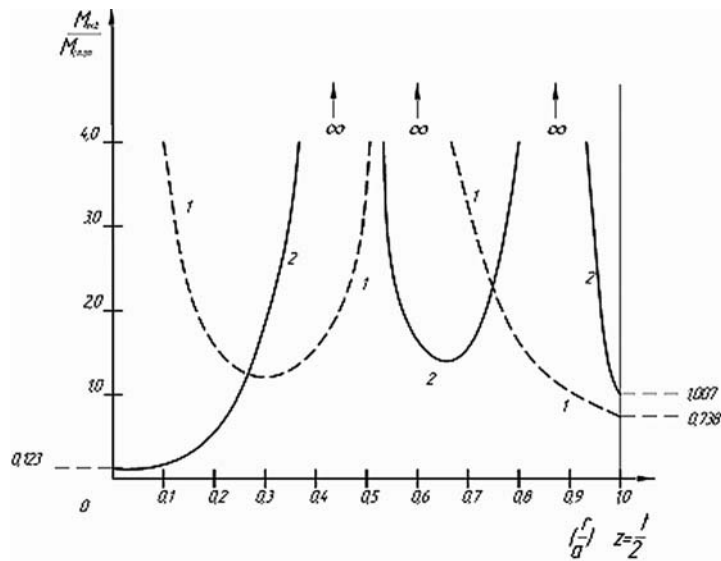
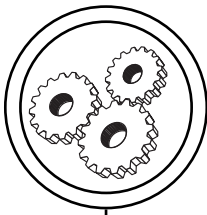


Рис. 7. Еквівалентна маса диску який працює на коливанні з двома вузловими колами, як функція радіального положення на поверхні диска (у радіальному та осьовому напрямках). 1 — r — напрямок; 2 — z — напрямок; $S = 2$, $n = 0$; $d/t = 4$; $\mu = 0,30$

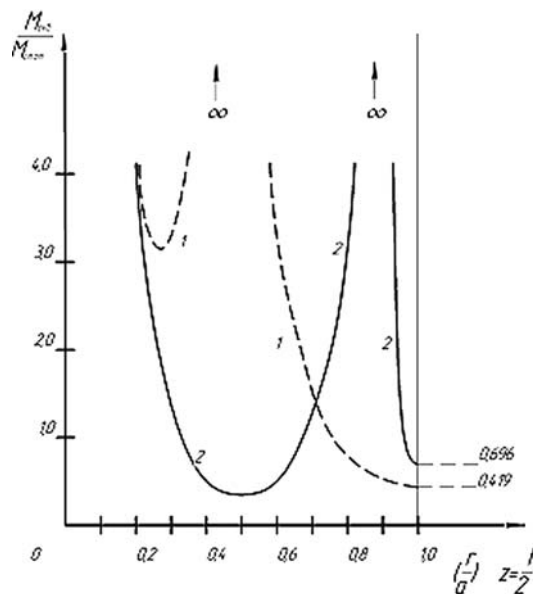
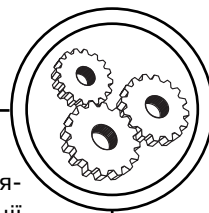


Рис. 8. Еквівалентна маса диску, який працює на коливанні з двома вузловими діаметрами та одному вузловому колу, як функція радіального положення на поверхні диска (у радіальному та осьовому напрямках). 1 — r — напрямок; 2 — z — напрямок; $S = 1$, $n = 2$; $d/t = 4$; $\mu = 0,30$



1. Ковбаса В. П. Визначення механічних властивостей матеріалів шляхом дослідження коливань зразка / В. П. Ковбаса, Я. В. Коваль // Вібрації в техніці та технологіях. — 2009. — № 4(56). — С. 92—96.
2. Rayleigh I. W. S. Theory of sound / I. W. S. Rayleigh. — N. Y. : Dover, 1945. [Існує переклад: Реллей. Теорія звуку. В двох томах. Пер. с англ. — М. : Гостехиздат, 1955. — Т. 1. — 503 с.; Т2. — 475 с.].
3. Mason W. P. Electromechanical Transducers and Wave Filters / W. P. Mason. — N. Y. : Van Nostrand, 1942. — 420 с.
4. Naser I. Exakte Berechnung der Biegeresonanzen rechteckiger und zylindrischer Stäbe / I. Naser // Hochfrequenztech. u. Elektroar. — 1965. — Bd. 74. — S. 30—36.
5. Sugawara S. The equivalent mechanical network of a bar vibrating in flexure derived from Timoshenko's beam theory / S. Sugawara, M. Konno, T. Watanabe // Trans. IECE. — 1978. — V. 61 — A. no. 9. — P. 903—909.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко. — М. : Наука, 1967. — 320 с.
7. Deresiewicz H. Axially symmetric vibrations of a circular disk / H. Deresiewicz, R. D. Mindlin // J. Appl. Mech. — 1953. — Vol. 75. — P. 86—88.
8. Sharma R. L. Equivalent circuit of a resonant, finite, isotropic, elastic circular disk / R. L. Sharma // J. Acoust. Soc. Amer. — 1956. — Vol. 28. — P. 1153—1158.
9. Onoe M. Analysis of flexural vibrations of a circular disk / M. Onoe, T. Yano // IEEE Trans. Sonics, Ultrasonics. — 1968. — SU — 15. — P. 182—185.
10. Klovstad I. Calculation of frequency, equivalent mass, and amplitude of thick vibrating disks / I. Klovstad // Computer Program SA 159, Rockwell International, Newport Beach, California.
11. Naser I. Kurze Darlegung der Theorie elektromechanischer Filter mit Plattenresonatoren / J. Naser // Hochfrequenztech. u. Electroak. — 1962. — Bd. 71. — S. 123—132.

Надійшла до редакції 21.03.11