УДК 53.082.4

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНО-ІНЕРЦІЙНИХ ТА КІНЕМАТИЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ СИСТЕМ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРИКЛАДІ СТРИЖНЕВИХ РЕЗОНАТОРІВ

© В. С. Ловейкін, д.т.н., професор, Ю. В. Човнюк, к.т.н., доцент, Л. А. Дяченко, здобувач, Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна

Установлены соотношения, которые связывают между собой геометрические параметры системы с ее упругими и вязкосными свойствами, массой измерительного датчика (устройства), в котором возникают собственные колебания определенной интенсивности при тех или иных изначальных и граничных условиях.

The correlations, which link the geometric parameters of the system with its elastic and viscous qualities and the weight of the meter, which has its own vibrations of a particular intensity in different conditions are determined.

Постановка проблеми

При взаємодії робочих органів сільськогосподарських машин з оброблюваними матеріалами та середовищами зазвичай необхідно визначити механічні властивості останніх, а саме: 1) резонансні частоти коливань (різних видів); 2) розподіл переміщень; 3) еквівалентні маси (матеріалів, середовищ, що розглядаються як системи з розподіленими параметрами); 4) пружні та в'язкі характеристики та ін. При цьому можна використати для підрахунку й кількісної оцінки вказаних вище механічних величин амплітудно-частотні характеристики вільних коливань таких систем.

Для коректного розв'язку подібних задач необхідно чітко визначити, які частини дискретно-континуальних систем підтримують вільні коливання певної резонансної частоти й просторової форми, що відповідає конкретним граничним умовам. Слід зазначити, що при цьому кількісна оцінка масових (інерційних) еквівалентних характеристик суттєво впливає у подальших розрахунках власних коливань дискретно-континуальних систем, до складу котрих входять також й інерційні характеристики самого вимірювального приладу (датчика). Аналіз саме власних коливань таких систем, їх амплітудно-частотних характеристик дозволить визначити і їх пружно-в'язкі параметри.

Аналіз попередніх досліджень

У роботі [1] наведена методика визначення пружних властивостей матеріалу стрижня, яка заснована на обробці результатів вимірювання послідовних амплітуд коливань (згинних) даного стрижня. Проте автори цитованої роботи визначають приведену масу стрижня, який здійснює змінні коливання, використовуючи рівняння вигнутої лінії й тим самим ігнорують інші форми й частоти коливань такої системи, котрі, безумовно, справляють свій суттєвий вплив на величину еквівалентної маси системи. На думку авторів даного дослідження, підхід роботи [1] не зовсім послідовний і у певному сенсі некоректний, оскільки не дозволяє врахувати вплив на інерційні властивості дискретно-континуальних систем інших мод коливань, форм і видів (зв’язаних) коливань, а тому вимагає доопрацювання, уточнення і подальшого узагальнення з метою залучення його для використання у інженерних методах розрахунку основних механічних властивостей оброблюваних матеріалів та середовищ, взаємодіючих з робочими органами сільськогосподарських машин.

У даній роботі запропонований універсальний підхід та методика розрахунку основних механічних характеристик дискретно-континуальних систем за різноманітних видів коливань, які виникають у результаті вказаної взаємодії.

Мета роботи

Встановлення співвідношень, які зв’язують між собою геометричні параметри системи з її пружними та в’язкими властивостями, масою вимірювального датчика (приладу), у котрому виникають власні коливання певної інтенсивності за тих чи інших початкових та граничних умов.

Результати проведених досліджень

Кожна дискретно-континуальна система, яка моделює взаємодію робочого органу сільськогосподарської машини певного призначення з оброблюваним матеріалом (середовищем), по своїй суті є механічним резонатором. У якості прикладу книга Релея «Теорія звуку», яка написана біля 100 років назад до сих пір залишається прекрасним джерелом матеріалу щодо коливань тонких смуг та стрижнів, а також тонких пластин та дисків [2]. Отже, ми не будемо будувати нову теорію у цій частині, але поглянемо на роботи, які виконані за останні 100 років, що мають відношення до механічних резонаторів. Особливу увагу ми приділимо наступним типам резонаторів:

1) тілам, у котрих один розмір значно більший чи менший двох інших розмірів;

2) товстим тілам, у котрих хвильовий рух більш складний, ніж у простих поздовжніх, крутних, згинних чи радіальних видах коливань.

1. Класичний метод розрахунку частот та амплітуд

У більшості літературних джерел вивчення коливань розподілених й однорідних резонаторів ведеться на основі так званого класичного методу. При використанні цього методу аналізу приймають наступні припущення:

1) амплітуда коливань мала, і характеристики напруження — деформація (або сила — швидкість) лінійні;

2) немає внутрішніх втрат енергії, і коливання мають місце у вакуумі;

3) відсутні об'ємні сили, такі, як гравітаційні чи магнітні, діючі на резонатор.

З прийняттям цих трьох гіпотез нашою початковою точкою аналізу буде виведення системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, які мають назву хвильових рівнянь, котрі описують рух резонатора. Опис хвильового руху всередині кожної малої частини резонатору проведемо у термінах хвилі розширення (поздовжнього) й рівнооб'ємної хвилі (зсувної). Ці рівняння зазвичай мають другий чи четвертий порядок по часу. Рух частинок у малій області називають зазвичай переміщенням; наприклад, переміщення частинки є переміщення її з початкового положення чи положення рівноваги у точку, яка визначається координатною системою.

Наступним кроком аналізу є виключення часової залежності хвильових рівнянь підстановкою, наприклад, $U = U_1 \cdot e^{jwt}$, $j^2 = -1$, у член d^2U/dt^2, де U — переміщення, після чого будемо мати $(-U_1 \cdot \omega^2 \cdot e^{jwt})$. Після скорочення всіх членів рівнянь на e^{jwt} у них залишаться тільки просторові змінні, і ми можемо досліджувати результуючі рівняння, використовуючи стандартні методи розв'язку лінійних диференціальних рівнянь.

Зазвичай розв'язки для переміщень виражають у виді тригонометричних, гіперболічних або беселевих функцій від добутку постійних розповсюдження на координати ($A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx$, наприклад). Якщо тіло неоднорідне, тоді необхідно застосувати свої рівняння для кожної однорідної частини. Далі визначаються граничні умови, загальне число їх дорівнює сумарному порядку диференціальних рівнянь. Коли резонатор коливається вільно граничні умови визначаються з того факту, що поверхні не навантажені, або, іншими словами, сили й згинні моменти, а відповідно, напруження й деформації на поверхнях дорівнюють нулю. Це дозволяє покласти рівними нулю похідні від переміщень по координатам граничних поверхонь. Наприклад, деформація $dU/dx = 0$ при $x = 0$.

Використовуючи граничні умови сумісно з рівняннями руху, ми можемо виключити частину амплітудних постійних і написати розв'язок у формі, яка застосовується до нашого специфічного резонатору. Подальше використання граничних умов дозволяє нам написати рівняння чи систему рівнянь, з котрих можна отримати основне частотне рівняння. У матричній формі рівняння можуть мати вид:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0, \qquad (1)$$

де для прикладу у випадку стрижня, який здійснює коливання згину,

$$a_{11} = ch(kl) - \cos(kl),$$

де l — довжина стрижня, k — хвильове число.

Розв'язок цієї (у загальному випадку порядку nxn) системи рівнянь знаходять прирівнюючи визначник ($a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$) до нуля. Після групування членів і використання тригонометричних тотожностей ми знайдемо так звані частотні рівняння, котрі у випадку стрижня, що здійснює коливання згину, зводяться до єдиного рівняння:

$$\cos(kl) = \frac{1}{ch(kl)}, \qquad (2)$$

Корені цих рівнянь використовуються для визначення власних частот резонатору.

Для знаходження власних частот резонатору необхідно знайти співвідношення між частотою ω і постійною розповсюдження k. Це співвідношення знаходиться підстановкою частинного розв'язку для переміщень у хвильові рівняння й скорочення членів, які утримують самі переміщення. Члени, що залишились, утворюють дисперсійне рівняння, котре для резонатору, який здійснює коливання стиснення-розтягу по довжині, є просто:

$$k = \omega \cdot \left(\frac{\rho}{E}\right)^{1/2}, \qquad (3)$$

де ω — кругова частота коливань, k — хвильове число, ρ — щільність матеріалу, а його модуль пружності — E. Підстановка коренів k у дисперсійне рівняння дає можливість визначити власні частоти ω_n.

Після знаходження власних частот резонаторів можна визначити амплітуду (переміщень) у довільних точках підстановкою коренів ($k_n \cdot l$) частотного рівняння у рівнянні (1) й потім шляхом знаходження з нього відношення постійних A до B. Знаючи відношення цих постійних, можна знайти амплітуду у будь-якій точці з рівнянь для переміщень.

У наступних пунктах ми застосуємо класичний метод розв'язку до резонаторів зростаючої складності.

2. Поздовжні й крутні типи коливань стрижневих резонаторів

У випадку, коли один розмір резонатору стає значно більшим двох інших, типи коливань спрощуються і стають ідеальними типами коливань поздовжнього стиснення — розтягу, крутки й згину. Хвильові рівняння для коливань стиснення-розтягу й крутки тонких стрижнів і смуг мають другий порядок по відношенню до координати довжини, у той час, як рівняння коливань згину має четвертий порядок, що буде показано нижче.

2.1. Резонатори поздовжніх коливань

Резонатор з коливанням поздовжнього виду зображений на рис. 1.

Почнемо аналіз з виведення хвильового рівняння розповсюдження поздовжніх хвиль у тонкому стрижні чи смузі.

Сила, прикладена до однієї сторони перетину (перерізу), показана на рис. 1, дорівнює напруженню S_x, помноженому на площу поперечного перерізу A, у той час як на протилежній стороні перерізу сила дорівнює $S_x \cdot A + dS_x \cdot A$. Сила, визначена переміщенням u середньої точки перерізу, дорівнює його (перерізу) масі, помноженій на прискорення. Знаходячи суму всіх сил (алгебраїчну), знайдемо:

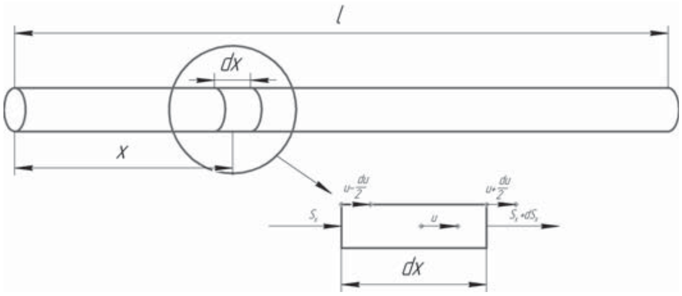

Рис. 1. Резонатор з коливанням поздовжнього виду

$$\left(S_x \cdot A + dS_x \cdot A\right) - S_x \cdot A - \\ -\rho \cdot A \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

де ρ — щільність матеріалу резонатора.

Збираючи члени й ділячи на $A \cdot d_x$, отримаємо:

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = \rho \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (5)$$

Враховуючи, що напруження S_x дорівнює модулю пружності E, помноженому на деформацію dU/dx (де dU є різницею переміщень на двох сторонах перерізу), з (5) отримаємо хвильове рівняння:

$$\left(\frac{E}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = -\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (6)$$

Нашим першим кроком у знаходженні резонансних частот і амплітуд буде виключення залежності від часу у рівнянні (6). Оскільки U залежить від часу як e^{jwt}, тоді:

$$\left(\frac{E}{\rho}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right) = -\omega^2 \cdot U, \quad (7)$$

З основ теорії лінійних диференціальних рівнянь випливає, що розв'язком (7) є:

$$U(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx), \quad (8)$$

де x — відстань від кінця стрижня, а k — постійна розповсюдження (хвильовий вектор).

Оскільки ми розглядаємо тільки випадок, приведений на рис. 1, де кінці стрижня коливаються вільно, можна продиференціювати (8) й записати:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=l}} = A \cdot k \cdot \cos kx - \\ -B \cdot k \cdot \sin kx = 0, \quad (9)$$

При x = 0, оскільки sin kx = 0, Ak·coskx – 0 = 0 або A = 0. Отже,

$$U(x) = B \cdot \cos(kx), \quad (10)$$

Наступним кроком буде накладання граничної умови при x = l, котра із врахуванням (9) залишається у вигляді:

$$\sin(kl) = 0. \quad (11)$$

Рівняння (11) є результуючим частотним рівнянням, котре має корені при:

$$k_n \cdot l = n \cdot \pi, \quad n = 1,2,3.... \quad (12)$$

Далі встановимо зв'язок між k й частотою за допомогою підстановки розв'язку (10) у хвильове рівняння (7) і диференціювання лівої частини. Після скорочення на член cos kx отримаємо:

$$k=\omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}, \qquad (13)$$

тобто отримаємо так зване дисперсійне рівняння резонатора. Зазначимо, що фазова швидкість, визначена як ω/k, і групова швидкість, визначена як $d\omega/dk$, постійні і дорівнюють:

$$\frac{\omega}{k}=\frac{d\omega}{dk}=\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2}. \qquad (14)$$

Оскільки на будь-якій частоті швидкість постійна, поздовжній тип коливань називають бездисперсійним (недисперсійним).

Потім підставимо величину k_n з рівняння (12) у дисперсійне рівняння (13); це дає змогу знайти співвідношення для визначення резонансних частот стрижня:

$$f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{n}{2l}\cdot\sqrt{\frac{E}{\rho}}. \qquad (15)$$

Для кожної моди порядку n за допомогою підстановки величини k_n з (12) у рівняння (10) може бути знайденим розподіл переміщень U(x). У результаті отримаємо:

$$U(x) = B\cdot\cos(n\pi x/l). \qquad (16)$$

Еквівалентна маса

Еквівалентна маса резонатору визначається як еквівалент розподіленого параметру стрижня чи пластини, зосереджений у заданій точці і визначений для конкретної власної частоти. Іншими словами, ми замінюємо еквівалентну схему передавальної лінії з розподіленими пружно-інерційними параметрами, на масу й пружину, які мають резонанс на частоті ω_n.

Один з методів знаходження еквівалентної маси резонатору, який коливається поздовжньо, полягає у обчисленні кінетичної енергії стрижня на резонансній частоті й ділення цієї енергії на половину квадрату швидкості у даному напрямку й у даній точці. Це є наслідком того факту, що кінетична енергія стрижня інваріантна, тобто кінетична енергія не залежить від точки чи напрямку відліку, обраного для розрахунку еквівалентної маси. Таким чином, можна прирівнювати кінетичну енергію у пружно-масовій системі до енергії стрижневого резонатору.

З рівняння (10) й рівняння $V_x=\frac{dU(x)}{dt}$ випливає:

$$\frac{1}{2}\cdot M_{екв.x}\cdot V_x^2 = \frac{1}{2}\int_0^l (V_0\cdot\cos k_n x)^2\cdot\rho\cdot A\cdot dx, \qquad (17)$$

де $M_{екв.x}$ — еквівалентна маса у точці x, зв’язана зі швидкістю V_x у напрямку вісі x. V_0 є швидкість у точці x = 0 й ρ — щільність матеріалу стрижня. Отже, еквівалентна маса, приведена до кінців стрижня дорівнює:

$$M_{екв.o,l}=\frac{\frac{1}{2}\rho A\cdot V_0^2\cdot\int_0^l\cos^2(k_n x)dx}{\frac{1}{2}V_0^2}, \qquad (18)$$

а після підстановки $k_n=\frac{n\cdot\pi}{l}$ у (18) й інтегрування отримаємо:

$$M_{екв.0,l} = \frac{\rho \cdot l \cdot A}{2} = \frac{M_{CT}}{2}, \quad (19)$$

де $M_{ст} = \rho \cdot l \cdot A$.

Отже, еквівалентна маса, приведена до кінця поздовжньоколивного стрижня (резонатора) у напрямку вісі пластини чи стрижня, є просто половиною його статичної маси (M_{CT}). Зауважимо, що при даному (поздовжньому) виді коливань і даних граничних умовах (кінці стрижня вільні від напружень) виникає результат (19). Якщо граничні умови змінюються, тоді й зміниться величина $U_n(x)$, $M_{екв0,l}$ а також f_n, або хоча б одна з цих величин.

Наприклад, при визначенні резонансних частот f_n поздовжніх коливань стрижня, у якого обидва кінці ($x = 0$ й $x = l$) закріплені, маємо:

$$f_n = \left(\frac{n}{2l}\right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n = 1,2,3,.... \quad (20)$$

Переміщення має розподіл:

$$U(x) = A \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad (21)$$

а еквівалентна маса $M_{екв0,l}$ співпадає з (19).

Для випадку, коли на кінці $x = 0$ стрижня існує нульове переміщення, а на кінці $x = l$ стрижень вільний від напружень, тобто:

$$U\Big|_{x=0} = 0, \ \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \quad (22)$$

$$f_n = \frac{(2n-1)}{4l} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad n = 1,2,3..., \quad (23)$$

$$U_n(x) = A \cdot \sin\left\{\frac{(2n-1)}{4l} \cdot 2\pi \cdot x\right\} = A \cdot \sin\left\{\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right\}, \quad (24)$$

$M_{екв.0,l}$ співпадає з (19).

Розв'язок для нетонкого стрижня

У тому випадку, коли радіус стрижневого резонатору більше, ніж 1/10 довжини хвилі, у хвильове рівняння повинен бути введений коригуючий коефіцієнт. Релеєм [2] та Мезоном [3] було показано, що переміщення вздовж вісі стрижня виражається у вигляді:

$$U_x = Z(r) \cdot \sin(k_n x),$$

де $Z(r)$ — функція відстані r від вісі стрижня. На резонансних частотах f_n постійні розповсюдження k_n дорівнюють (за відповідних граничних умов) $\frac{n\pi}{l}$, n є N.

З урахуванням тільки головної корекції, котра залишає лише інерцію стиснення-розтягу у напрямку, перпендикулярному вісі стрижня, частотне рівняння приймає вид:

$$f_n = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \left[1 - \left(\frac{n \cdot \mu \cdot \pi \cdot a}{2l}\right)^2\right], \quad (25)$$

де μ — коефіцієнт Пуассона й a — радіус стрижня. Частотне рівняння (25) переходить у рівняння тонкого стрижня [рівняння (15)] при $a \to 0$. Мезоном показано, що при дуже великому діаметрі стрижня у рівняння повинні бути включені члени вищого порядку.

З точки зору обчислення еквівалентної маси ефект поперечної інерції (тобто ефект врахування кінетичної енергії, зв'язаної з рухом у напрямку, перпендикулярному вісі стрижня) полягає у збільшенні цієї маси по відношенню до величини, визначеної співвідношенням (19). Причина збільшення полягає у наступному: кінетична енергія, яка зв'язана з коливанням вподовж вісі x, дещо менше повної кінетичної енергії стрижня (чисельник співвідношення (18), який визначає еквівалентну масу). Отже, відношення повної енергії до члену у знаменнику, який має квадрат швидкості у напрямку вісі x, збільшується. Навпаки, еквівалентна маса у напрямку, перпендикулярному вісі, зменшується, коли відношення діаметру до довжини зростає (при умові збереження статичної маси постійно).

2.2. Резонатори (стрижневі) з коливаннями скрутки

Стрижневі резонатори з коливаннями крутного виду застосовуються у радіотехніці й телефонії. Важливо розглянути не тільки частотні рівняння, але й рівняння для еквівалентної маси стрижня з крутними коливаннями у напрямку вісі стрижня. Слід зазначити, що аналіз крутних коливань важливий при дослідженні функціонування у робочих режимах карданних валів, трансмісії сільськогосподарських машин різноманітного призначення.

Частотні й амплітудні співвідношення

Частотні й амплітудні характеристики резонаторів з крутними коливаннями знаходяться за допомогою такої ж техніки обчислень, котра була використана при аналізі коливань повздовжнього типу. Результуючі співвідношення для тонкого стрижня використовують поняття пружного модуля зсуву й кутового переміщення θ:

$$f_n = \left(\frac{n}{2l}\right) \cdot \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \; n \in N, \qquad (26)$$

$$\theta = \theta_1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (27)$$

де θ_1 — кутове переміщення кінців стрижня.

Швидкість розповсюдження коливань крутного виду $V_p = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$,

де G — модуль зсуву матеріалу стрижня, а ρ — його щільність, така ж, як і швидкість рівно об'ємної (зсувної) хвилі у нескінченному середовищі. Однакові залежності (формули) мають місце не тільки для швидкості, але, як і для нескінченного середовища, у котрого не відбувається зміна об'єму, частота коливань не залежить від співвідношення між радіусом і довжиною стрижня. Отже, співвідношення (26) і (27) можна застосовувати також і для випадку великого діаметру стрижня.

Еквівалентна маса

Рис. 2 показує поперечний переріз стрижня радіусу a. Для малих переміщень лінійне переміщення точки вподовж радіусу дорівнює r·θ. Отже, лінійна швидкість у довільній точці дорівнює:

$$V_{x,r} = r \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right). \qquad (28)$$

Для того, щоб знайти еквівалентну масу у точці тангенціального напрямку (на лінії кола радіусу r), слід розподілити повну кінетичну енергію (W_k) на половину квадрату швидкості у даній точці. Вона виражається подвійним інтегралом:

$$W_k = \int_0^l \int_0^a \frac{1}{2}\left[\rho dx\left(2\pi r dr\right)\right] \cdot \left[r^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right], \qquad (29)$$

у якому члени, які стоять у квадратних дужках, відповідають масі й швидкості малої області стрижня.

Виконуючи вказане вище інтегрування й ділячи результат на половину квадрату швидкості у даній точці, отримаємо співвідношення:

$$M_{екв}\big|_{r,x} = \frac{W_k}{\frac{1}{2}V_{x,r}^2} = \frac{\rho\pi l \cdot a^4}{4r^2 \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}. \qquad (30)$$

Еквівалентний момент інерції маси у напрямку прикладеного моменту τ, як показано на рис. 2, можна подати через $M_{екв}$ у тій самій точці й у тому ж напрямку, як і: $I_{екв} = r^2 \cdot M_{екв}$.

Отже,

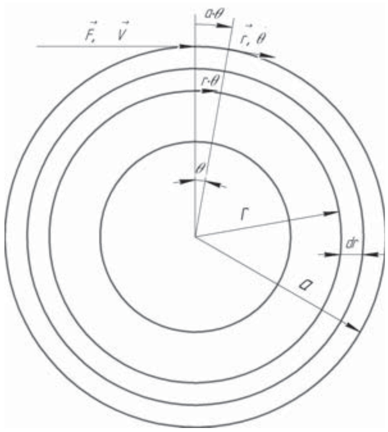

Рис. 2. Розміри у області поперечного перерізу резонатору з крутними коливаннями, які використовуються у розрахунках еквівалентних мас у напрямку прикладеної сили (F) й швидкості (V) або прикладеного моменту (M) та кутової швидкості (ω)

$$I_{екв}\big|_{r,x} = \frac{\rho\pi l a^4}{4 \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}. \qquad (31)$$

Зазначимо, що еквівалентний момент інерції маси не залежить від радіальної компоненти точки r.

Оскільки $I_{екв}$ та $M_{екв}$ просто зв'язані множником r^2, сконцентруємо увагу тільки на еквівалентній масі. У випадку r = a, коли точка знаходиться на головній поверхні стрижня,

$$M_{екв}\big|_{a,x} = \frac{\rho\pi l a^2}{4 \cdot \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}, \qquad (32)$$

і на кінцях стрижня

$$M_{екв}\big|_{r_1 l} = \frac{\rho\pi l a^x}{4r^2}, \qquad (33)$$

або у кінцевому випадку, при r = a й x = l,

$$M_{екв}\big|_{a,l} = \frac{\rho\pi l a^2}{4} = \frac{M_{ст}}{4}, \qquad (34)$$

де $M_{ст} = \rho\cdot\pi a^2\cdot l$ (повна/статична маса стрижня).

На нульовій частоті круглих коливань (n = 0) стрижень обертається як єдине ціле, й переміщення не залежать від відстані X.

Використовуючи співвідношення (28) й (30), знайдемо, що:

$$M_{екв}\big|_{a,\omega=0} = \frac{M_{ст}}{2} = \frac{\rho\pi l a^2}{2}. \qquad (35)$$

1. Ковбаса В. П. Визначення механічних властивостей матеріалів шляхом дослідження коливань зразка / В. П. Ковбаса, Я. В. Коваль // Вібрації в техніці та технологіях. — 2009. — № 4(56). — С. 92—96. 2. Rayleigh I. W. S. Theory of sound / I. W. S. Rayleigh. — N. Y. : Dover, 1945. [Існує переклад: Релей. Теория звука. В двух томах. Пер. с англ. — М. : Гостехиздат, 1955. — Т. 1. — 503 с.; Т2. — 475 с.]. 3. Mason W. P. Electromechanical Transducers and Wave Filters / W. P. Mason. — N. Y. : Van Nostrand, 1942. — 420 с.

Рецензент — О. М. Величко, д.т.н.,
професор, НТУУ «КПІ»

Надійшла до редакції 10.05.11