

**ТЕОРЕТИЧНІ РОЗРАХУНКИ ОПОРНОЇ ПЛОЩІ  
НА ЦИЛІНДРИЧНИХ ПОВЕРХНЯХ  
ДЕТАЛЯХ ПОЛІГРАФІЧНОГО ОБЛАДНАННЯ**

© О. І. Лотоцька, аспірантка, НТУУ «КПІ», Київ, Україна

**Получена аналитическая зависимость относительной площади поверхностей частично-регулярного микро-рельефа синусоидального типа с отсутствием пересечения регулярных неровностей.**

**In the article is received analytical dependence of relative surface area of partially-regular microrelief of the sinusoidal type with no crossing of the regular inequalities.**

**Постановка проблеми**

Одним із суттєвих напрямків підвищення експлуатаційних властивостей деталей поліграфічного устаткування, а у свою чергу — підвищення надійності поліграфічного обладнання, є отримання заданих властивостей поверхонь деталей методами поверхневого зміцнення.

Сучасні технологічні процеси і методи зміцнення дають можливість керувати показниками якості й оптимізувати параметри поверхні та приповерхневого шару.

Фінішні технологічні операції займають важливе місце серед технологічних процесів, що підвищують надійність деталей. Методи оздоблювально-зміцнювальної обробки (ОЗО) особливо впливають на такі експлуатаційні властивості, як зносостійкість, опір утомі, контактна жорсткість, вібростійкість, корозійна стійкість тощо. Актуальним з точки зору підвищення експлуатаційних властивостей є поєднання гальваніч-

них і хімічних методів нанесення покриттів з одночасним використанням ОЗО [1, 2].

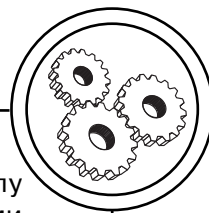
Одним з основних параметрів частково-регулярного мікро-рельєфу (ЧРМР), який впливає на зносостійкість й інші експлуатаційні властивості поверхонь з частково-регулярним мікро-рельєфом, є відносна площа поверхні, що її займають регулярні нерівності.

**Аналіз попередніх досліджень**

При роботі деталей і вузлів машин і механізмів в умовах тертя і ковзання найбільш інформативним параметром, якщо завершальною технологічною операцією була ОЗО, є відносна площа, що її займають регулярні нерівності.

Відносна опорна площа  $F_H$  — це відношення площі, що її займають регулярні нерівності  $F_K$  до поверхні деталі, яка оброблюється  $F$ .

$$F_H = \frac{F_K}{F} 100\%.$$



У наукових працях В. А. Горохова, П. О. Киричка, В. М. Торбила, Є. В. Рижова, Ю. Г. Шнейдера, Я. С. Фельдмана встановлено аналітичні залежності між параметрами регулярного мікрорельєфу й технологічними факторами [3–5], але для розробленого нами технологічного процесу [2] запропоновані залежності, що наведені нижче.

Для аналітичного розрахунку геометричних характеристик циліндричних поверхонь необхідно виходити з відповідної математичної моделі процесу утворення мікрорельєфу. Зі збільшенням числа факторів для визначення параметрів мікрорельєфу точність розрахунків підвищується, але при цьому ускладнюються також і самі розрахунки [6].

ЧРМР поділяється на дискретно й безперервно регулярні нерівності. Нами розглядається ЧРМР з безперервно регулярними нерівностями, в яких відсутній перетин нерівностей з елементами ввігнутої форми [7].

### Мета роботи

Метою роботою є встановити аналітичні залежності між режимами обробки й геометричними параметрами мікрорельєфу, що дозволяє шляхом регулювання режимів визначити геометрію поверхні залежно від їх експлуатаційних властивостей.

### Результати проведених досліджень

Для отримання аналітичних залежностей між відносною площею, що її займають регулярні

нерівності ( $F_H$ ) першого типу і технологічними факторами зроблено такі допущення: заготованка, що оброблюється, є ідеально круглою циліндричною;  $v_1 \ll v$  та  $v_1 \ll 2\pi n_{\text{подв.х}} l$ , де  $v_1$  — поступальна швидкість руху деформувального елемента,  $n_{\text{подв.х}}$  — частота осциляцій деформувального елемента,  $l$  — довжина заготованки; глибина вдавлювання є однаковою в усіх перерізах циліндричної заготованки.

При вдавлюванні деформувального елемента в циліндричну поверхню утворюється відбиток, межі якого на поверхні розгортки мають вигляд кривої, яка близька до кола радіусом  $\rho$ ,  $2\rho$  є товщиною відбитка (рис.) [6].

Траєкторія деформувального елемента  $L$  описується залежністю:

$$L \begin{cases} x = vt \\ y = v_1 t + l \sin(2\pi n_{\text{подв.х}} t) \end{cases} \quad (1)$$

де  $v$  — швидкість заготованки в мм/с.

$$V = \pi n_{\text{шп}} d_3, \quad (2)$$

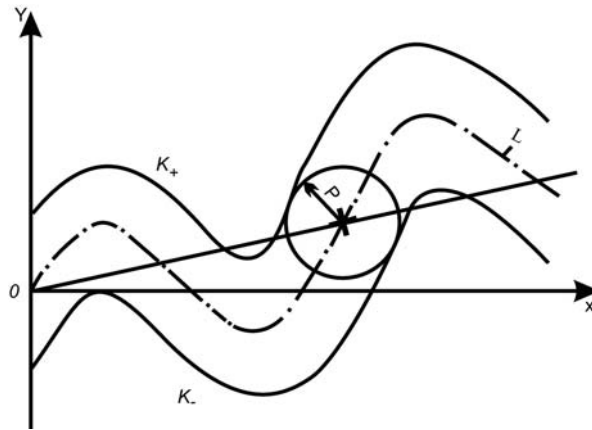
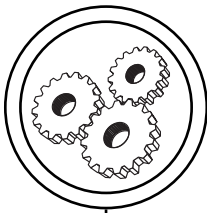
$d_3$  — діаметр заготованки,  $n_{\text{шп}}$  — частота обертання заготованки.

З залежності (1) слідує, що

$$t = \frac{x}{v}. \quad (3)$$

Підставимо (3) в (1), таким чином  $L$ :

$$y = \frac{v_1}{v} x + l \sin\left(\frac{2\pi n_{\text{подв.х}}}{v} x\right) = L(x). \quad (4)$$



Утворення канавки на поверхні розгортки циліндра, де  $2\rho$  — товщина відбитку,  $L$  — крива центру відбитка,  $K_+$  і  $K_-$  — криві меж відбитку,  $l$  — амплітуда осциляцій деформуючого елемента

Знайдемо рівняння  $K_+$  і  $K_-$ . Розглянемо точку  $(x_0, L(x_0))$  на кривій  $L$ .

$l_0(x)$  — нормаль до  $L$  в точці  $(x_0, L(x_0))$ . Запишемо відоме рівняння нормалі:

$$l_0(x) = -\frac{1}{L'(x_0)}(x - x_0) + L(x_0). \quad (5)$$

Знайдемо похідну залежності (4):

$$L'(x) = \frac{v_1}{v} + \frac{2\pi n_{\text{подв.}x} l}{v} \cdot \cos \frac{2\pi n_{\text{подв.}x}}{v} x. \quad (6)$$

Підставимо (6) і (4) в (5):

$$l_0(x) = \frac{v}{v_1 + 2\pi n_{\text{подв.}x} l \cos \frac{2\pi n_{\text{подв.}x}}{v} x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{v_1}{v} x_0 + l \sin \left( \frac{2\pi n_{\text{подв.}x}}{v} x_0 \right). \quad (7)$$

Точки  $(x_+, K_+(x_+))$  та  $(x_-, K_-(x_-))$  є точками на  $K_+$  і  $K_-$  відповідно такими, що відстань від них до  $(x_0, L(x_0))$  дорівнює  $\rho$ :

$$\rho^2 = (x_0 - x)^2 + (L(x_0) - l_0(x))^2 \quad (8)$$

рівняння (8) записано для знаходження  $x_+$  та  $x_-$  (бо  $(x_+, K_+(x_+))$  та  $(x_-, K_-(x_-))$  лежать на нормалі  $l_0$ ). Підставимо (5) в (8):

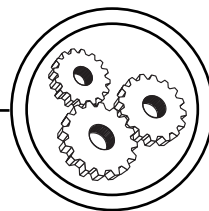
$$\rho^2 = (x_0 - x)^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{L'(x_0)^2} \right). \quad (9)$$

Звідси

$$x_{\pm} = x_0 \mp \frac{\rho L'(x_0)}{\sqrt{1 + L'(x_0)^2}}. \quad (10)$$

Тоді

$$K_{\pm}(x_{\pm}) = L(x_0) \pm \frac{\rho}{\sqrt{1 + L'(x_0)^2}}. \quad (11)$$



Підставивши

$$x_0 = vt, \quad (12)$$

отримаємо рівняння кривих  $K_{\pm}$ :

$$K_{\pm} \begin{cases} x(t) = vt \mp \frac{\rho L'(x_0)}{\sqrt{1+L'(x_0)^2}} \\ y(t) = L(vt) \pm \frac{\rho}{\sqrt{1+L'(x_0)^2}} \end{cases} \cdot (13)$$

Підставимо в (13) відповідно (6) і (4)

$$K_{\pm} \begin{cases} x(t) = vt \mp \frac{\rho \left( v_1 + 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \right) \cos 2\pi n_{\text{подв.х.}} t}{\sqrt{v^2 + \left( v_1 + 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \right)^2}} \\ y(t) = v_1 t + \sin 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \pm \frac{\rho v}{\sqrt{v^2 + \left( v_1 + 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \right)^2}} \end{cases} \cdot (14)$$

Тоді площу  $S$  відбитку можна розрахувати за такою залежністю

$$S = \frac{\Lambda}{v_1} n_{\text{подв.х.}} l, \quad (15)$$

де  $\frac{\Lambda}{v_1}$  — час роботи,  $l$  — площа відбитку за один прохід осциляції:

$$l = \int_0^n \frac{1}{\text{подв.х.}} K_+(t) \cdot x'_+(t) dt - \int_0^n \frac{1}{\text{подв.х.}} K_-(t) \cdot x'_-(t) dt. \quad (16)$$

Взьмемо (6) і позначимо як

$$L'(vt) = \psi(t) = \frac{1}{v} \left( v_1 + 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \right) \cos 2\pi n_{\text{подв.х.}} t. \quad (17)$$

Підставимо (17) в (14), тоді

$$K_{\pm} \begin{cases} x_{\pm}(t) = vt \mp \frac{\rho \psi(t)}{\sqrt{1+\psi^2(t)}} \\ y(t) = v_1 t + \sin 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \pm \frac{\rho}{\sqrt{1+\psi^2(t)}} \end{cases} \cdot (18)$$

Взьмемо похідну з (18), щоб підставити в (16):

$$x'_{\pm}(t) = v \pm \frac{\rho \psi'(t)}{2(1+\psi^2(t))^{\frac{3}{2}}}. \quad (19)$$

Підставимо (19) і (18) в (16):

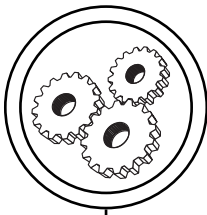
$$l = \int_0^n \frac{1}{\text{подв.х.}} \left( v_1 t + \sin 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \right) \left( v + \frac{\rho \psi'(t)}{2(1+\psi^2(t))^{\frac{3}{2}}} \right) dt - \int_0^n \frac{1}{\text{подв.х.}} \left( v_1 t + \sin 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \right) \left( v - \frac{\rho \psi'(t)}{2(1+\psi^2(t))^{\frac{3}{2}}} \right) dt = \rho \int_0^n \frac{1}{\text{подв.х.}} \left( \frac{2v}{\sqrt{1+\psi^2(t)}} + \frac{\left( v_1 t + \sin 2\pi n_{\text{подв.х.}} t \right) \psi'(t)}{(1+\psi^2(t))^{\frac{3}{2}}} \right) dt = \rho \cdot c, \quad (20)$$

де  $c$  — константа.

Як відомо, довжина траєкторії  $L$  дорівнює

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{S}{2\rho} = c. \quad (21)$$

В нашому випадку, підставимо (15) в (21):



$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{S}{2\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Lambda}{v_1} n_{\text{подв.х.}} \frac{l}{2\rho} \quad (22)$$

Підставимо кінцевий результат (20) в (22), отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Lambda}{v_1} n_{\text{подв.х.}} \frac{l}{2\rho} &= \\ = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Lambda}{v_1} n_{\text{подв.х.}} \frac{c}{2} &= \quad (23) \\ = \frac{\Lambda}{v_1} n_{\text{подв.х.}} \frac{c}{2} = C, \end{aligned}$$

де  $\frac{c}{2}$  — довжина траєкторії  $L$  на одному періоді осциляцій:

$$c = 2 \int_0^{\frac{1}{n_{\text{подв.х.}}}} \sqrt{1 + \psi^2(t)} dt \quad (24)$$

Підставимо (17) в (24):

$$c = 2 \int_0^{\frac{1}{n_{\text{подв.х.}}}} \sqrt{v^2 + \left( \frac{v_1 + 2\pi n_{\text{подв.х.}}}{\cos 2\pi n_{\text{подв.х.}} t} \right)^2} dt \quad (25)$$

$$c = \frac{1}{\pi n_{\text{подв.х.}}} \int_0^{2\pi} \sqrt{v^2 + \left( \frac{v_1 + 2\pi n_{\text{подв.х.}}}{\cos z} \right)^2} dz \quad (26)$$

Підставимо (26) і (20) в (15)

$$S = \frac{\Lambda \rho}{\pi v_1} \int_0^{2\pi} \sqrt{v^2 + \left( \frac{v_1 + 2\pi n_{\text{подв.х.}}}{\cos z} \right)^2} dz \quad (27)$$

Підставимо (2) в (27)

$$S = \frac{2\Lambda \rho n_{\text{шп.}}}{v_1} \int_0^\pi \sqrt{d_3^2 + \left( \frac{v_1 + \pi n_{\text{шп.}}}{2 \frac{n_{\text{подв.х.}}}{n_{\text{шп.}}} \cos z} \right)^2} dz \quad (28)$$

Записаний тут інтеграл є еліптичним інтегралом.

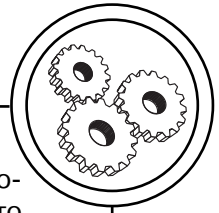
Якщо додатково відомо, що  $v_1 \ll v$  та  $v_1 \ll 2\pi n_{\text{подв.х.}} l$ , тоді аналітична залежність (27) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} S &\approx \frac{\Lambda \rho}{\pi v_1} \int_0^{2\pi} \sqrt{v^2 + (2\pi n_{\text{подв.х.}} l)^2} \cos^2 z dz = \\ &= \frac{4\Lambda \rho}{\pi v_1} \sqrt{v^2 + (2\pi n_{\text{подв.х.}} l)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 - \frac{(2\pi n_{\text{подв.х.}} l)^2}{\sqrt{v^2 + (2\pi n_{\text{подв.х.}} l)^2}} \sin^2 z \right) dz = \quad (29) \\ &= \frac{4\Lambda \rho}{\pi v_1} \sqrt{v^2 + (2\pi n_{\text{подв.х.}} l)^2} E \left( \frac{2\pi n_{\text{подв.х.}} l}{\sqrt{v^2 + (2\pi n_{\text{подв.х.}} l)^2}} \right), \end{aligned}$$

де  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 z} dz = E(k)$  — повний нормальний еліптичний інтеграл Лежандра 2-го роду, який записується таким чином:

$$\begin{aligned} E(k) &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \right)^2 \frac{k^{2n}}{1-2n} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \frac{k^2}{1} - \left( \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \dots \right] \quad (30) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ - \left( \frac{(2n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right] \end{aligned}$$

Підставимо (2) в (29)



$$S \approx \frac{4\Lambda\rho n_{\text{шп}}}{v_1} \cdot \sqrt{d_3^2 + \left(2\rho \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}}\right)^2} \cdot \left[ \frac{2l \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}}}{\sqrt{d_3^2 + \left(2l \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}}\right)^2}} \right] \quad (31)$$

Загальна площа деталі

$$S_{\text{заг}} = \pi d_3 \Lambda, \quad (32)$$

тому відносна площа відбитку з урахуванням (28) буде розраховуватись

$$F = \frac{S}{S_{\text{заг}}} 100\% = \frac{S}{\pi d_3 \Lambda} 100\% = \frac{2\rho n_{\text{шп}}}{\pi d_3 v_1} \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{d_3^2 + \left( \frac{v_1}{\pi n_{\text{шп}}} + 2 \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}} |\cos z| \right)^2} dz \cdot 100\% \quad (33)$$

Якщо врахувати, що  $v_1 \ll v$  та  $v_1 \ll 2\pi n_{\text{подв.х}} l$ , тоді аналітична залежність 33 буде мати вигляд:

$$F = \frac{4\rho n_{\text{шп}}}{\pi d_3 v_1} \sqrt{d_3^2 + \left(2l \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}}\right)^2} \cdot \left[ \frac{2l \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}}}{\sqrt{d_3^2 + \left(2l \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}}\right)^2}} \right] 100\% \quad (34)$$

Зауважимо, що ці залежності справедливі лише для випадку,

коли частково-регулярний мікрорельєф не перетинається, тобто

$$2l \ll v_1 \frac{\pi d_3}{v} = \frac{v_1}{n_{\text{шп}}}, \quad (35)$$

Час повного обертання  $\frac{1}{n_{\text{шп}}} = \frac{\pi d_3}{v}$ .

Крім того, в обчисленнях вважалось, що  $K_+$  і  $K_-$  описують деякі функції, а це чинне лише для випадку, коли  $\rho$  не перевищує мінімальний радіус кривизни траєкторії L. Знайдемо другу похідну від залежності 4:

$$y'' = -l \frac{(2\pi n_{\text{подв.х}})^2}{v^2} \quad (36)$$

$$\cdot \sin \frac{2\pi n_{\text{подв.х}}}{v} x,$$

$$\min_x \left| \frac{1}{y''} \right| = \frac{v^2}{l(2\pi n_{\text{подв.х}})^2} \geq \rho, \quad (37)$$

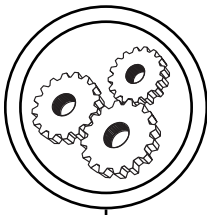
Якщо підставити (2) в (37), отримаємо

$$\rho \leq \left( \frac{n_{\text{шп}}}{n_{\text{подв.х}}} \right)^2 \frac{d_3^2}{2l}. \quad (38)$$

Підсумок: при виконанні умов (35) та (38) відносна площа знаходиться за аналітичною залежністю (33).

Якщо додатково виконуються умови  $v_1 \ll \pi d_3 n_{\text{шп}}$  та  $v_1 \ll \ll 2\pi n_{\text{подв.х}} l$ , то

$$F \approx \frac{4\rho n_{\text{шп}}}{\pi v_1} \sqrt{1 + \left(2 \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}} \frac{l}{d_3}\right)^2} \cdot \left[ \frac{2l \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}}}{\sqrt{d_3^2 + \left(2l \frac{n_{\text{подв.х}}}{n_{\text{шп}}}\right)^2}} \right] 100\%, \quad (39)$$



$$\text{де } E(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \frac{(2n)!}{2^{2n} \cdot (n!)^2} \right)^2 \frac{k^{2n}}{1-2n} -$$

повний нормальний еліптичний інтеграл Лежандра 2-го роду [8].

Після ОЗО згідно з розробленим технологічним процесом [2] є операція хромування, таким чином визначимо площу після цієї операції:

$$F_{H1} = \sqrt{1 + \left( \frac{2 \frac{n_{\text{повдв.х}}}{n_{\text{шп}}} \frac{l}{d_3}}{n_{\text{шп}}} \right)^2} - \sqrt{-2h_1 \frac{\left( \frac{2 \frac{n_{\text{повдв.х}}}{n_{\text{шп}}} \frac{l}{d_3}}{n_{\text{шп}}} \right) \frac{1}{d_3}}{\sqrt{1 + \left( \frac{2 \frac{n_{\text{повдв.х}}}{n_{\text{шп}}} \frac{l}{d_3}}{n_{\text{шп}}} \right)^2}}} \quad (40)$$

## Висновки

Між відносною площею, яку займають регулярні нерівності синусоїдального типу, і параметрами режимів обробки встановлені аналітичні залежності, які дозволяють утворювати на поверхні необхідну величину відносної площі за умов експлуатації. Проведені експериментальні дослідження підтвердили теоретичні, а зносостійкість при цьому збільшилась у 1,15–1,28 раз у порівнянні із зразками, підданими тільки ОЗО після шліфування.

1. Киричок П. О. Зміцнення поверхонь металевих деталей / П. О. Киричок, В. Г. Олійник, Т. Ю. Киричок. — Київ : Преса України, 2004. — 240 с.
2. Лотоцька О. І. Підвищення експлуатаційних властивостей деталей поліграфічних машин / О. І. Лотоцька // Технологія і техніка друкарства. — Київ : НТУУ «КПІ» ВПІ, 2008. — № 3–4. — С. 16–20.
3. Шнейдер Ю. Г. Эксплуатационные свойства деталей с регулярным микрорельефом / Ю. Г. Шнейдер. — Л. : Машиностроение, 1982. — 248 с.
4. Фельдман Я. С. Расчет параметров микрорельефа цилиндрических вибронакатанных поверхностей деталей машин и приборов и их технологическое обеспечение / Под ред. Ю. Г. Шнейдера. — Л. : ЛИТМО, 1979. — 97 с.
5. Рыжов Э. В. Технологическое обеспечение эксплуатационных свойств деталей машин / Э. В. Рыжов, А. Д. Суслов, В. П. Федоров. — М. : Машиностроение, 1979. — 176 с.
6. Шнейдер Ю. Г. Образование регулярных микрорельефов на деталях и их эксплуатационные свойства / Ю. Г. Шнейдер. — Л. : Машиностроение, 1972. — 241 с.
7. ГОСТ 24773-81 Поверхности с регулярным микрорельефом. Классификация, параметры и характеристики.
8. Г. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Издательство «Наука», 1978. — 832 с.

Рецензент — В. М. Сірацький, к.ф.-м.н.,  
технічний директор ТОВ «Mac House»

Надійшла до редакції 24.06.11