

УДК 655.3.022:519.6:539.3

DOI: 10.20535/2077-7264.1(91).2026.355054

© В. Б. Струтинський*, д-р техн. наук, проф.,
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

**ІНТЕГРОВАНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ
ПРОЦЕСІВ ЗГИНАННЯ ТА КЛЕЙОВОГО СКРІПЛЕННЯ
В ІНТЕГРАЛЬНИХ ОБКЛАДИНКАХ
ІЗ ВИКОРИСТАННЯМ ЕВОЛЬВЕНТНИХ
ФАЛЬЦЮВАЛЬНИХ ПРОФІЛІВ**

Об'єктом дослідження є процес згинання та приклеювання клапанів інтегральної обкладинки з використанням профільних фальцювальних планок евольвентного типу в умовах пневматичного притиску. Метою роботи є розроблення інтегрованої механіко-математичної моделі, що описує взаємодію геометрії фальцювальної планки, кінематики згинання, напружено-деформованого стану матеріалу та умов формування клейового з'єднання для підвищення якості інтегральних обкладинок.

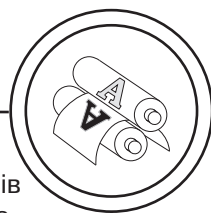
Ключові слова: інтегральні обкладинки; профільні фальцювальні планки; евольвентний профіль; математичне моделювання; кінематичні параметри; клейове з'єднання; напружено-деформований стан; геометричний синтез.

Постановка проблеми

Сучасний розвиток поліграфічної галузі характеризується інтенсифікацією виробничих процесів, впровадженням високошвидкісних автоматизованих ліній та зростанням вимог до якості готової продукції. Особливо це стосується виготовлення інтегральних обкладинок, які поєднують функції захисту книжкового блоку та формування естетичних характеристик видання. Високі вимоги до геометричної точності, зовнішнього вигляду та довговічності таких виробів обумовлюють необхідність удосконалення технологічних процесів їх формування.

Одним із пріоритетних етапів виготовлення інтегральних обкладинок є процес згинання клапанів з одночасним формуванням клейового з'єднання. Саме на цьому етапі закладаються основні експлуатаційні характеристики виробу, зокрема міцність, стабільність геометричної форми та відсутність дефектів у зоні фальца. У сучасних технологічних системах згинання здійснюється за допомогою профільних фальцювальних планок, геометрія яких визначає характер деформування матеріалу та розподіл напружень.

Використання традиційних профілів фальцювальних елементів



не завжди забезпечує оптимальні умови формування згину, що призводить до локальних концентрацій напружень, виникнення тріщин, заломів або пошкодження декоративних шарів обкладинки. У зв'язку з цим актуальним є застосування евольвентних профілів, які забезпечують плавну зміну кривини вздовж контактної зони та сприяють більш рівномірному розподілу деформацій.

Разом з тим, процес згинання в реальних умовах нерозривно пов'язаний із процесом приклеювання клапанів до основи обкладинки, що здійснюється під дією пневматичного притиску.

Якість клейового з'єднання визначається комплексом чинників, серед яких геометрія нанесення клею, розподіл тиску, реальна площа контакту та механічні властивості системи «клапан—клей—основа». Недостатня узгодженість цих параметрів може призводити до зниження міцності з'єднання, нерівномірності товщини обкладинки та появи технологічних дефектів.

Аналіз сучасних досліджень показує, що більшість наукових робіт присвячена окремому розгляду процесів згинання або формування клейових з'єднань, тоді як їх взаємодія в умовах реального технологічного процесу враховується недостатньо.

Відсутність інтегрованих математичних моделей, що описують одночасно геометрію фальцювальних елементів, кінематику згинання, напружено-деформований стан матеріалу та параметри формування клейового контакту, обмежує можливості оптимізації технологічних процесів.

У зв'язку з цим актуальним є розроблення комплексного під-

ходу до моделювання процесів згинання та приклеювання клапанів інтегральних обкладинок, який дозволить встановити взаємозв'язок між конструктивними, кінематичними та силовими параметрами процесу та забезпечити підвищення якості продукції.

Сучасні тенденції розвитку поліграфічного виробництва характеризуються зростанням вимог до якості виготовлення книжково-журнальної продукції, зокрема інтегральних обкладинок, які поєднують високі естетичні та експлуатаційні характеристики. Одним із ключових етапів їх виготовлення є процес згинання клапанів та формування клейового з'єднання, від якого безпосередньо залежить геометрична точність, міцність та довговічність виробу.

У реальних умовах виробництва процес згинання клапанів інтегральної обкладинки здійснюється за допомогою профільних фальцювальних планок, геометрія яких визначає характер деформації матеріалу. При цьому недостатньо обґрунтований вибір профілю робочої поверхні може призводити до локальних концентрацій напружень, виникнення тріщин, заломів або пошкодження декоративного шару.

Додаткову складність становить те, що процес згинання відбувається одночасно з операцією приклеювання клапанів до основи обкладинки під дією пневматичного притиску. У цьому випадку якість клейового з'єднання визначається не лише фізико-хімічними властивостями клею, а й геометрією нанесення, розподілом тиску, жорсткістю системи «клапан—клей—основа» та умовами



контакту поверхонь. Недостатній або нерівномірний тиск призводить до зменшення фактичної площі контакту та зниження міцності з'єднання, тоді як надмірний тиск може спричиняти деформацію матеріалу та порушення геометрії обкладинки.

Аналіз існуючих підходів показує, що більшість досліджень розглядає окремо процес згинання або формування клейового з'єднання, тоді як їх взаємодія в умовах реального технологічного процесу враховується недостатньо. Зокрема, відсутні узагальнені математичні моделі, які б одночасно описували геометрію профілю фальцювальної планки, кінематику згинання, напружено-деформований стан матеріалу та параметри формування клейового контакту.

Актуальність дослідження зумовлена необхідністю підвищення якості та стабільності виготовлення інтегральних обкладинок в умовах інтенсифікації поліграфічного виробництва, де навіть незначні відхилення параметрів процесу призводять до появи дефектів (заломів, хвиль, розшарувань) та зниження споживчих властивостей продукції. Відсутність узгоджених інженерних методик розрахунку геометрії фальцювальних елементів і режимів пневматичного притиску обмежує можливість оптимізації технологічного процесу та потребує розроблення комплексних математичних моделей, здатних описати взаємодію всіх визначальних чинників.

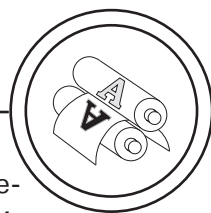
У зв'язку з цим виникає науково-практичне завдання встановлення взаємозв'язку між геометричними, кінематичними та силовими параметрами процесу

згинання клапанів інтегральної обкладинки і умовами формування надійного клейового з'єднання. Розв'язання цього завдання дозволить обґрунтувати раціональні параметри фальцювальних планок і режимів пневматичного притиску, забезпечити стабільну якість продукції та підвищити ефективність технологічного процесу. Це особливо актуально для автоматизованих високошвидкісних ліній, де відсутність адаптивного керування параметрами процесу призводить до накопичення технологічних похибок.

Аналіз попередніх досліджень

Сучасні дослідження процесів формування виробів із паперу та картону охоплюють широкий спектр задач, пов'язаних із механікою деформування матеріалу, моделюванням процесів згинання, а також формуванням клейових з'єднань. Водночас ці процеси здебільшого розглядаються ізольовано, без урахування їх взаємодії в умовах реального поліграфічного виробництва.

У роботі [1] досліджено процес згинання картону під дією бігувального інструмента з використанням методу скінченних елементів. Авторами встановлено закономірності формування деформацій, локальних пошкоджень і розшарування матеріалу при згині на кут до 180° . Ці результати є дотичними до даного дослідження в частині опису механіки згинання та напружено-деформованого стану паперових матеріалів. Водночас у зазначеній роботі не розглядається вплив геометрії робочого профілю фальцювальної планки (зокрема евольвент-



ного), а також відсутній зв'язок із процесом формування клейового з'єднання.

У дослідженні [2] проаналізовано механічну поведінку паперу при високих швидкостях деформації. Показано, що зі зростанням швидкості навантаження змінюються характеристики міцності та жорсткості матеріалу. Отримані результати є важливими для розуміння впливу кінематичних параметрів процесу згинання, зокрема швидкості транспортування. Проте у цій роботі не враховується геометрія інструмента згинання та не розглядаються умови формування клейового контакту.

У роботі [3] запропоновано підхід до моделювання структури paperboard на основі даних рентгенівської томографії з використанням статистичних об'ємних елементів. Дослідження дозволяє більш точно враховувати анізотропні властивості матеріалу при числовому моделюванні. Це є важливим з точки зору уточнення моделей напружено-деформованого стану при згині. Водночас питання геометрії згинального профілю, кінематики процесу та формування клейового з'єднання в роботі не розглядаються.

Роботи [4, 5] присвячені визначенню жорсткості паперових конструкцій і розробці методів її розрахунку. У них встановлено вплив геометричних параметрів і структури матеріалу на згинальні характеристики. Отримані результати є дотичними до задачі оцінювання кривини та напружень при згинанні клапанів. Разом з тим ці дослідження не враховують особливості контактної взаємодії з профільними фальцювальними поверхнями та не розглядають процес приклеювання.

У роботі [6] досліджено поведінку картонних конструкцій із використанням експериментальних методів та числового моделювання. Автори підтверджують ефективність застосування методу скінченних елементів для аналізу деформацій та напружень у паперових матеріалах. Однак у цій роботі відсутній розгляд локальних процесів згинання за заданою геометрією інструмента та їх зв'язку з формуванням клейового шва.

Питання формування клейових з'єднань у паперових і картонних матеріалах розглянуто у роботі [7], де досліджено механічні характеристики клейових з'єднань paperboard та виконано їх моделювання. Отримані результати є важливими для оцінювання міцності клейового контакту та впливу параметрів навантаження. Водночас у цій роботі не враховано вплив процесу попереднього згинання матеріалу та геометрії фальцювальних елементів на формування клейового з'єднання.

У дослідженні [8] запропоновано модель оцінювання міцності клейових з'єднань у пакувальних матеріалах на основі визначення сили відкривання. Робота є дотичною до даного дослідження в частині оцінювання міцності клейових швів і встановлення умов їх надійності. Проте вона не враховує вплив геометричних і кінематичних параметрів процесу згинання на формування клейового контакту.

У роботі [9] узагальнено сучасні підходи до моделювання механічної поведінки клейових з'єднань, зокрема методи континуального опису, cohesive zone models та багатомасштабні підходи.



Це дослідження є методологічною основою для побудови математичних моделей клейових контактів. Разом з тим воно має загальний характер і не враховує специфіку поліграфічних процесів, зокрема згинання клапанів інтегральних обкладинок.

У роботі [10] розглянуто сучасні підходи до вдосконалення клейових систем у книжковому виробництві. Автори акцентують увагу на підвищенні якості та довговічності палітурок. Ця робота підтверджує актуальність досліджень у напрямі оптимізації клейових процесів у книговиробництві. Водночас у ній відсутній математичний опис взаємодії процесів згинання та приклеювання.

Таким чином, аналіз сучасних наукових досліджень [1–10] показує, що існуючі роботи охоплюють окремі аспекти процесу формування інтегральних обкладинок, зокрема механіку згинання паперових матеріалів, їх напружено-деформований стан, а також умови формування клейових з'єднань. Водночас відсутні дослідження, у яких ці процеси розглядаються комплексно з урахуванням геометрії фальцювальної планки, кінематики згинання та параметрів пневматичного притиску в єдиній математичній постановці.

Зокрема, у відомих роботах не враховується вплив евольвентної геометрії робочої поверхні на розподіл кривини, напружень і умови формування клейового контакту, а також не встановлено взаємозв'язок між параметрами процесу згинання та характеристиками клейового з'єднання. Це визначає необхідність розроблення інтегрованої математичної моделі, що враховує взаємодію цих чинників.

Мета роботи

Розроблення та числовий аналіз інтегрованої математичної моделі процесу згинання та приклеювання клапанів інтегральної обкладинки з використанням евольвентних фальцювальних профілів для встановлення взаємозв'язку між геометричними параметрами інструмента, кінематикою процесу, напружено-деформованим станом матеріалу та умовами формування клейового з'єднання.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

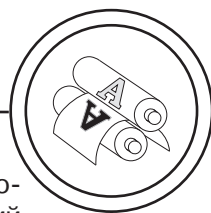
1. Розробити геометричну модель евольвентної фальцювальної поверхні та встановити аналітичні залежності для визначення її кривини вздовж довжини контактної зони.

2. Побудувати кінематичну модель процесу згинання клапана інтегральної обкладинки та визначити закономірності зміни кута згину вздовж контактної зони і в часі.

3. Дослідити напружено-деформований стан клапана при згинанні та встановити умови обмеження максимальних напружень і кривини для забезпечення цілісності матеріалу.

4. Розробити математичну модель формування клейового з'єднання з урахуванням геометрії нанесення клею, розподілу пневматичного тиску, коефіцієнта фактичного контакту та жорсткості системи «клапан—клей—основа», а також сформулювати умови його міцності та геометричної рівномірності.

5. Провести числове моделювання процесу, встановити вплив основних параметрів на характеристики згинання та приклеювання, узагальнити результати у ви-



гляді системи технологічних обмежень та визначити область допустимих параметрів технологічного процесу.

Результати проведених досліджень

Для аналізу процесу згинання та приклеювання клапанів інтегральної обкладинки розглянемо його узагальнену технологічну схему, що відображає послідовність взаємодії заготовки з фальцювальними та притисковими елементами. У межах цієї схеми визначаються характер деформування клапанів, умови контакту з робочими поверхнями інструмента та параметри формування клейового з'єднання.

На рис. 1 подано принципову схему процесу профільного фальцювання та приклеювання клапанів інтегральної обкладинки з використанням евольвентних фальцювальних планок і пневматичного притиску. Представлена схема дозволяє виділити основні геометричні, кінематичні та силові чинники, що визначають перебіг процесу, і слугує основою для побудови математичної моделі.

Розгортка обкладинки 1 транспортується вздовж робочої зони, при цьому клапани 2, 3 послідовно взаємодіють з евольвентними фальцювальними планками 4, 5, які забезпечують їх поступове згинання відповідно до заданої геометрії профілю. Завдяки евольвентній формі робочої поверхні досягається плавна зміна кривини вздовж довжини контакту, що сприяє рівномірному формуванню кута згину без локальних перегинів і концентрацій напружень.

На наступному етапі клапани піддаються дії пневматичних при-

тискових пристроїв 6, 7, які створюють розподілений нормальний тиск у зоні контакту з основою обкладинки. Під дією цього тиску відбувається ущільнення клейового шару та збільшення фактичної площі контакту, що забезпечує формування міцного клейового з'єднання.

Завершальний етап склеювання обкладинки 8 характеризується стабілізацією геометричної форми виробу та закріпленням клапанів у заданому положенні. Таким чином, схема ілюструє узгоджену дію геометрії фальцювальних елементів, кінематики процесу та пневматичного притиску, що визначають якість формування інтегральної обкладинки.

Робоча поверхня фальцювальної планки описується евольвентою кола радіуса R_0 . Введемо полярний параметр φ , що відповідає

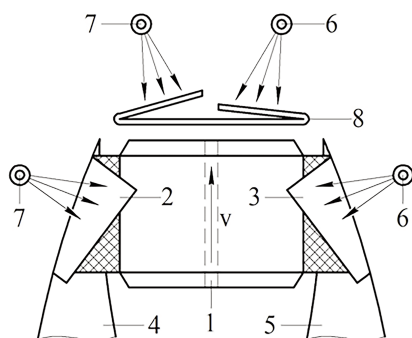
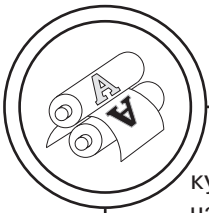


Рис. 1. Схема процесу профільного фальцювання та приклеювання клапанів інтегральної обкладинки з використанням евольвентної фальцювальної планки та пневматичного притиску: 1 — розгортка інтегральної обкладинки; 2, 3 — клапани обкладинки; 4, 5 — евольвентні фальцювальні планки; 6, 7 — пневматичні притискові пристрої; 8 — завершальний етап склеювання обкладинки



кату розгортання нитки з початкового кола. У декартовій системі координат (x, z) (вісь x — уздовж напрямку транспортування, вісь z — нормаль до площини транспортувальної стрічки) рівняння евольвенти мають вигляд

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= R_0(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi), \\ z(\varphi) &= R_0(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi). \end{aligned} \quad (1)$$

Інфінітезимальна довжина дуги евольвенти при зміні параметра φ визначається як

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2} d\varphi. \quad (2)$$

Беручи похідні від (24), одержуємо

$$\frac{dx}{d\varphi} = R_0\varphi\sin\varphi, \quad \frac{dz}{d\varphi} = R_0\varphi\cos\varphi,$$

звідки

$$ds = R_0\varphi d\varphi.$$

Після інтегрування при умові $s = 0$ за $\varphi = 0$ маємо залежність довжини дуги евольвенти від параметра:

$$s(\varphi) = \frac{1}{2}R_0\varphi^2. \quad (3)$$

Кривина евольвенти κ_{ev} як функція параметра φ визначається співвідношенням

$$\kappa_{ev}(\varphi) = \frac{\left| \frac{dx}{d\varphi} \frac{d^2z}{d\varphi^2} - \frac{dz}{d\varphi} \frac{d^2x}{d\varphi^2} \right|}{\left[\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 \right]^{3/2}} = \frac{1}{R_0\varphi}, \quad (4)$$

а радіус кривини відповідно дорівнює

$$\rho_{ev}(\varphi) = \frac{1}{\kappa_{ev}(\varphi)} = R_0\varphi. \quad (5)$$

Враховуючи (3), кривину можна подати і як функцію від довжини дуги:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{\frac{2s}{R_0}}, & \kappa_{ev}(s) &= \frac{1}{R_0\sqrt{2s/R_0}} = \\ & & &= \frac{1}{\sqrt{2R_0s}}. \end{aligned} \quad (6)$$

При проектуванні фальцювальної планки припускається, що в зоні контакту клапан інтегральної обкладинки прилягає до евольвентної поверхні й приймає її локальну кривину, тобто

$$\kappa(l) \approx \kappa_{ev}(s(l)), \quad (7)$$

де l — координата уздовж довжини клапана, а $s(l)$ — відповідна довжина дуги евольвенти у точці контакту.

Кінематична модель згинання клапана

Розглянемо клапан довжиною L_k , який спочатку лежить у площині транспортувальної стрічки й має нульовий кут відхилення $\theta = 0$ відносно цієї площини. У процесі руху розгортки клапан поступово входить у контакт з евольвентною планкою, і його кут згину θ зростає до кінцевого значення θ_f (для повного загибу на внутрішній бік обкладинки $\theta_f \approx \pi$).

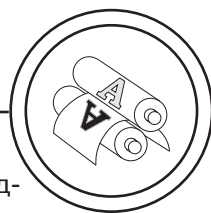
Відомо, що зміна кута повороту дотичної до осі елементарної ділянки балки (пластини) при згині пов'язана з її кривиною κ співвідношенням

$$\frac{d\theta}{dl} = \kappa(l), \quad (8)$$

де l — уздовжова координата вздовж нейтральної лінії клапана. Інтегруючи (8) з урахуванням (7), одержуємо

$$\theta(l) = \int_0^l \kappa(\xi) d\xi \approx \int_0^l \kappa_{ev}(s(\xi)) ds. \quad (9)$$

Таким чином, задана геометрія евольвенти безпосередньо



визначає закон зміни кута згину клапана. Для практичного аналізу зручно ввести ефективну довжину контакту L_c , на якій клапан повністю знаходиться в зоні дії евольвентної поверхні. Тоді кінцевий кут згину визначається як

$$\theta_f = \theta(L_c) \approx \int_0^{L_c} \kappa_{ev}(s(\xi)) d\xi. \quad (10)$$

У найпростішому наближенні, коли вважається, що в робочій зоні κ_{ev} змінюється порівняно повільно й може бути замінена деяким середнім значенням $\bar{\kappa}_{ev}$, отримуємо оцінку

$$\theta_f \approx \bar{\kappa}_{ev} L_c. \quad (11)$$

Параметри R_0 (початковий радіус), довжина евольвентної ділянки та її розташування відносно лінії згину підбираються таким чином, щоб для заданої довжини контакту L_c забезпечити необхідний кут згину θ_f при обмеженому рівні кривини.

З урахуванням руху транспортувальної стрічки зі швидкістю v введемо час t , протягом якого фіксована матеріальна точка клапана проходить через зону згину. Нехай координата x уздовж напрямку транспортування пов'язана з часом співвідношенням

$$x(t) = x_0 + vt, \quad (12)$$

де x_0 — координата точки при вході в зону згину. Відповідна зміна кута згину в часі може бути записана як

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dl} \frac{dl}{dt} = \kappa(l) v_{rel}, \quad (13)$$

де v_{rel} — відносна швидкість переміщення точки клапана вздовж евольвентної поверхні (для пос-

тійної швидкості стрічки при відсутності ковзання $v_{rel} \approx v$. Тоді

$$\theta(t) = \int_0^t \kappa(l(\tau)) v_{rel} d\tau. \quad (14)$$

Залежності (9)–(14) дозволяють визначити як розподіл кута згину вздовж довжини клапана, так і часові діаграми його зміни при заданій швидкості роботи пристрою. Це важливо для узгодження процесу згину з режимами вакуумного транспортування і приклеювання.

Напружено-деформований стан клапана та технологічні обмеження

Для оцінювання напружено-деформованого стану клапана використовуємо модель згину тонкої балки (стрічки) товщиною t із модулем пружності E . При плоскому згині згинальний момент $M(l)$ пов'язаний з кривою співвідношенням

$$M(l) = El\kappa(l), \quad (15)$$

де I — момент інерції поперечного перерізу нейтральної осі клапана. Для прямокутного перерізу шириною b і товщиною t

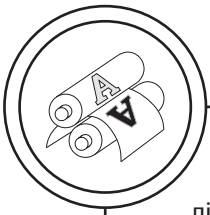
$$I = \frac{bt^3}{12}. \quad (16)$$

Максимальні нормальні напруження на розтягнутій і стисненій поверхнях клапана (на відстані $t/2$ від нейтральної осі) дорівнюють

$$\begin{aligned} \sigma_{max}(l) &= \frac{M(l)(t/2)}{I} = \\ &= \frac{El\kappa(l)(t/2)}{I} = \frac{Et}{2} \kappa(l). \end{aligned} \quad (17)$$

Підставляючи (7), одержуємо

$$\sigma_{max}(l) \approx \frac{Et}{2} \kappa_{ev}(s(l)). \quad (18)$$



З точки зору забезпечення цілісності й декоративних властивостей інтегральної обкладинки має виконуватися умова

$$\sigma_{\max}(l) \leq \sigma_{\text{доп}}, \quad \forall l \in [0; L_k], \quad (19)$$

де $\sigma_{\text{доп}}$ — допустимі напруження для матеріалу обкладинки (з урахуванням наявності друкованого шару, покриттів, ґрунтовок тощо).

Перепишемо (19) у вигляді обмеження на максимальну кривину

$$\begin{aligned} \kappa(l) &\leq \kappa_{\text{доп}} = \\ &= \frac{2\sigma_{\text{доп}}}{Et}. \end{aligned} \quad (20)$$

З урахуванням (4) або (6) одержуємо вимогу до геометрії евольвентної планки:

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{ев}}(\varphi) &= \frac{1}{R_0\varphi} \leq \kappa_{\text{доп}} \Rightarrow \\ \Rightarrow R_0\varphi &\geq \frac{1}{\kappa_{\text{доп}}}, \end{aligned} \quad (21)$$

або для заданої мінімальної довжини дуги контакту s_{\min} (див. (29))

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{ев}}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2R_0s}} \leq \kappa_{\text{доп}} \Rightarrow \\ \Rightarrow R_0 &\geq \frac{1}{2\kappa_{\text{доп}}^2 s}. \end{aligned} \quad (22)$$

Співвідношення (21), (22) використовуються при підборі радіуса R_0 та протяжності евольвентної ділянки так, щоб забезпечити:

- досягнення необхідного кінцевого кута згину θ_f (умова (10), (11));
- обмеження кривини й напружень у матеріалі обкладинки на рівні, меншому за допустимий (умови (19)–(22)).

Додатковим важливим чинником є відсутність накопичених пластичних деформацій, які можуть призводити до утворення стійких заломів, розшарування або

мікротріщин у зоні фальца. Для цього максимальні напруження $\sigma_{\max}(l)$ мають не перевищувати межу пружності $\sigma_{0,2}$ матеріалу або, в разі наявності багатошарової структури, узагальнену межу пружності для «пакета» шарів.

Таким чином, поєднання геометричного опису евольвентної поверхні (1)–(7), кінематичних залежностей (8)–(14) та напружено-деформованої моделі (15)–(22) дозволяє:

- встановити взаємозв'язок між конструктивними параметрами фальцювальних планок R_0 , довжиною евольвентної ділянки, положенням відносно лінії фальцювання) з кінцевим кутом згину клапанів;

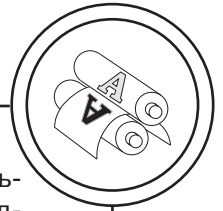
- визначити область допустимих режимів роботи пристрою, за яких забезпечується необхідний кут згину при обмеженому рівні напружень у матеріалі інтегральної обкладинки.

Математичне моделювання процесу приклеювання клапанів інтегральної обкладинки

Розглянуто математичну модель процесу формування клейового з'єднання між клапаном інтегральної обкладинки та її основою під дією пневматичного притиску. Мета моделювання — встановити взаємозв'язок між параметрами клейового шару (товщиною, площею, жорсткістю), розподілом тиску стисненого повітря та експлуатаційними навантаженнями й умовами надійності та рівномірності клейового шва.

Схема взаємодії в пакеті «клапан—клей—основа обкладинки»

Розглянемо локальний фрагмент пакета, утвореного клапаном



товщиною t_1 , основою обкладинки товщиною t_2 та клейовим шаром номінальної товщини h_k . Нехай клей наноситься на клапан у вигляді суцільної або сегментної смуги шириною b_k та довжиною L_k . Площа номінального клейового контакту дорівнює

$$A_k = b_k L_k. \quad (23)$$

У випадку сегментного нанесення клею з коефіцієнтом заповнення $\lambda \in (0; 1]$ (відношення довжини клейових сегментів до повної довжини зони з'єднання) ефективна площа

$$A_k^{\text{seg}} = \lambda A_k \quad (24)$$

Реальна площа фактичного контакту між клеєм і поверхнями визначається не лише геометрією нанесення, а й заповненням мікронерівностей, змочуванням та в'язкопружною течією клею під тиском. Для врахування цих чинників введемо коефіцієнт фактичного контакту $\varphi_c \in (0; 1]$, який характеризує частку площі, що реально несе навантаження:

$$\begin{aligned} A_{\text{еф}} &= \varphi_c A_k^{\text{seg}} = \\ &= \varphi_c \lambda A_k. \end{aligned} \quad (25)$$

У процесі притиску клапана до основи за допомогою стисненого повітря над клейовим шаром діє нормальний тиск p_n , де x — координата вздовж напрямку транспортування. Середній нормальний тиск у зоні з'єднання визначимо як

$$\bar{p}_n = \frac{1}{L_k} \int_0^{L_k} p_n(x) dx. \quad (26)$$

Вважаючи, що клейовий шар і контактна поверхня в першому наближенні поводяться як лінійно деформівна система типу «пружна основа», можна записати

зв'язок між середньою нормальною деформацією ε_n та середнім тиском:

$$\bar{p}_n = k_n \varepsilon_n, \quad (27)$$

де k_n — приведена нормальна жорсткість системи «клапан—клей—основа» на одиницю площі (H/m^2). Деформація ε_n пов'язана зі зміною товщини клейового шару

$$\varepsilon_n \approx \frac{h_0 - h_f}{h_0}, \quad (28)$$

де h_0 — початкова (до притиску) товщина шару, h_f — кінцева товщина після притиску і стабілізації. Комбінація (27)–(28) дозволяє встановити необхідний рівень тиску для досягнення заданої кінцевої товщини клею та відповідної геометричної рівномірності інтегральної обкладинки.

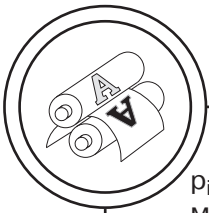
Для опису впливу тиску на фактичну площу контакту можна використати апроксимацію типу експоненційної залежності:

$$\varphi_c = 1 - \exp(-\alpha \bar{p}_n), \quad (29)$$

де α — емпіричний коефіцієнт, що характеризує чутливість системи «клей—поверхня» до прикладеного тиску (визначається експериментально). При $\bar{p}_n \rightarrow 0$ маємо $\varphi_c \rightarrow 0$, а при зростанні тиску $\varphi_c \rightarrow 1$.

Модель розподілу пневматичного тиску в зоні притиску

Після завершення згинання клапана зона клейового контакту потрапляє під дію пневматичного притиску, що реалізується за рахунок подачі стисненого повітря в систему каналів та камер, розташованих під транспортувальною стрічкою. Нехай тиск повітря на вході в камеру дорівнює



p_{in} , а на виході (або на відкрито-му кінці каналу) — p_{out} , причому

$$p_{in} > p_{out} \approx p_{atm}. \quad (30)$$

Для практичних розрахунків прийемо, що розподіл тиску вздовж довжини зони притиску L_p можна апроксимувати лінійною функцією:

$$p_n(x) = p_{in} - \left(\frac{\Delta p_p}{L_p} \right) x, \quad \Delta p_p = p_{in} - p_{out}, \\ 0 \leq x \leq L_p. \quad (31)$$

Середній тиск у зоні притиску, відповідно до (26) і (31), дорівнює

$$\bar{p}_n = \frac{1}{L_p} \int_0^{L_p} \left[p_{in} - \left(\frac{\Delta p_p}{L_p} \right) x \right] dx = \\ = p_{in} - \frac{\Delta p_p}{2}. \quad (32)$$

Рівнодіюча сила пневматичного притиску на смугу завширшки та довжиною L_p становить

$$F_p = \int_0^{L_p} p_n(x) b_k dx = b_k L_p \bar{p}_n. \quad (33)$$

Якщо довжина зони притиску повністю перекриває клейову ділянку $L_p \geq L_k$, середній тиск у клейовому шві наближено можна ототожнити з \bar{p}_n . У протилежному випадку (часткове перекриття) ефективний середній тиск у зоні клею \bar{p}_c залежатиме від перекриття та геометрії каналів; в першому наближенні

$$\bar{p}_c \approx \gamma_p \bar{p}_n, \quad (34)$$

де $\gamma_p \in (0; 1]$ — коефіцієнт перекриття (частка площі клейового шва, яка фактично потрапляє в зону підвищеного тиску).

Комбінація (29), (32) і (34) дає можливість пов'язати параме-

три пневмосистеми (p_{in} , p_{out} , L_p) з коефіцієнтом фактичного контакту φ_c :

$$\varphi_c = 1 - \exp[-\alpha \bar{p}_c] = \\ = 1 - \exp \left[-\alpha \gamma_p \left(p_{in} - \frac{\Delta p_p}{2} \right) \right]. \quad (35)$$

Таким чином, шляхом вибору вхідного тиску p_{in} , геометрії каналів і довжини зони притиску L_p можна забезпечити задане значення φ_c , а отже — і необхідну ефективну площу клейового контакту A_{ef} .

Умова надійності клейового з'єднання

Надійність клейового з'єднання з точки зору експлуатації обкладинки визначається, з одного боку, міцністю клею на зсув і відрив, а з іншого — зовнішніми навантаженнями, які виникають при згинанні, відкриванні/закриванні блоку, транспортуванні та користуванні виданням.

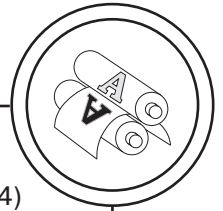
Розглянемо найпростішу модель, в якій домінуючим є зсувний режим навантаження клейового шару. Нехай максимальна розрахункова сила зсуву, яка передається через один клапан, дорівнює P_s , а середня зсувна напруженість у клейовому шві

$$\tau_{сер} = \frac{P_s}{A_{ef}} = \frac{P_s}{\varphi_c \lambda A_k}. \quad (36)$$

Допустима зсувна напруженість для даного клею $\tau_{доп}$ визначається за результатами механічних випробувань. Умова міцності клейового з'єднання має вигляд

$$\tau_{сер} \leq \tau_{доп}. \quad (37)$$

Підставляючи (59) у (60), одержуємо:



$$\varphi_c^{\min} = \frac{P_s}{\lambda A_k \tau_{\text{доп}}}, \quad (38)$$

Позначимо

$$\varphi_c^{\min} = \frac{P_s}{\lambda A_k \tau_{\text{доп}}}, \quad (39)$$

тоді для забезпечення міцності необхідно виконати

$$\varphi_c \geq \varphi_c^{\min}. \quad (40)$$

З іншого боку, залежність (35) встановлює зв'язок між φ_c та параметрами пневматичного притиску. Підставляючи (40) у (35), отримуємо умову на мінімальний середній тиск у зоні клею:

$$1 - \exp\left[-\alpha \gamma_p \left(p_{\text{in}} - \frac{\Delta P_p}{2}\right)\right] \geq \varphi_c^{\min}. \quad (41)$$

Звідси

$$\exp\left[-\alpha \gamma_p \left(p_{\text{in}} - \frac{\Delta P_p}{2}\right)\right] \leq 1 - \varphi_c^{\min}, \quad (42)$$

і, враховуючи монотонність експоненти,

$$\begin{aligned} p_{\text{in}} - \frac{\Delta P_p}{2} &\geq \\ &\geq \frac{1}{\alpha \gamma_p} \left[-\ln(1 - \varphi_c^{\min})\right] = \\ &= p_{\text{мін}}^*. \end{aligned} \quad (43)$$

Величина $p_{\text{мін}}^*$ є мінімально необхідним «ефективним» середнім тиском у зоні притиску, який забезпечує потрібну частку фактичної площі контакту φ_c^{\min} для заданої геометрії клейового шва та навантаження P_s .

Окрім міцності на зсув, до клейового з'єднання висуваються вимоги щодо рівномірності товщини обкладинки в зоні клапана. Відповідно до (28), кінцева товщина клею h_f повинна забезпечити дотримання допуску

$$|h_f - h_{\text{ном}}| \leq \Delta h_{\text{доп}}, \quad (44)$$

де $h_{\text{ном}}$ — номінальне значення товщини клею, а $\Delta h_{\text{доп}}$ — допустиме відхилення (визначається з урахуванням вимог до рівності товщини інтегральної обкладинки та відсутності видимих «хвиль» чи вм'ятин на її поверхні). Через співвідношення (27)–(28) умова (44) може бути переформульована у вигляді обмежень на допустимий діапазон середнього тиску \bar{p}_n , а отже — й на параметри пневмосистеми.

Таким чином, система залежностей (23)–(44) дозволяє:

— пов'язати геометрію та схему нанесення клею (суцільний/сегментний шар) з ефективною площею контакту та зсувною напруженістю;

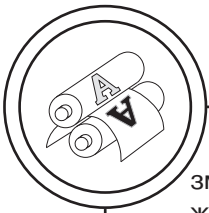
— встановити вимоги до рівня та розподілу пневматичного тиску, необхідного для досягнення заданої частки фактичного контакту φ_c ;

— забезпечити виконання одночасно двох груп критеріїв:

1. міцнісних (нерівності (37)–(40)),
2. геометричних (рівномірність товщини згідно з (44)).

Для подальшого аналізу працездатності процесу та визначення впливу основних параметрів на якість формування інтегральної обкладинки виконано числове дослідження отриманих залежностей. З цією метою використано аналітичні співвідношення, наведені у (1)–(44), які описують як геометрію евольвентної поверхні, так і кінематичні та силові характеристики процесу.

Результати розрахунків дозволяють встановити закономірності



зміни кривини, кута згину, напруженого стану клапана та параметрів клейового з'єднання залежно від довжини контактної зони, геометрії фальцювальної планки та режимів пневматичного притиску.

Вплив основних параметрів процесу

Вплив радіуса R_0 — збільшення $R_0 \rightarrow$ зменшення кривини; зменшення напружень; покращення якості згину.

Вплив довжини контакту L_c — збільшення $L_c \rightarrow$ збільшення кута згину; більш рівномірний розподіл деформацій.

Вплив швидкості транспортування v

$$\frac{d\theta}{dt} = \kappa(l)v, \quad (45)$$

де v — швидкість транспортування, м/с.

Збільшення швидкості призводить до зростання швидкості деформації та ризику дефектів.

Аналіз формування клейового з'єднання

Коефіцієнт фактичного контакту:

$$\varphi_c = 1 - \exp(-\alpha \bar{p}), \quad (46)$$

де φ_c — коефіцієнт фактичного контакту; α — емпіричний коефіцієнт; \bar{p} — середній тиск, Па.

— при малому тиску \rightarrow контакт малий;

— при великому тиску \rightarrow насичення.

Приклад: $\varphi_c \approx 0,98$ — забезпечується майже повний контакт поверхонь.

Умова міцності клейового з'єднання

$$\tau = \frac{P_s}{\varphi_c \lambda A_k}, \quad (47)$$

де τ — зсувна напруженість; P_s — зсувне навантаження, Н; λ — коефіцієнт заповнення клею; A_k — площа клейового контакту; φ_c — коефіцієнт контакту.

Умова міцності:

$$\tau \leq \tau_{\text{доп}}. \quad (48)$$

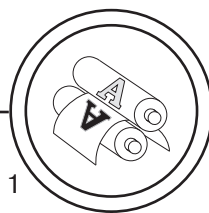
Приклад: $\varphi_c^{\text{мін}} \approx 0,04$; реальне значення (0,98) значно більше \rightarrow запас міцності.

Узагальнені технологічні обмеження

Узагальнення отриманих аналітичних залежностей дозволяє сформулювати систему технологічних обмежень, що визначають працездатність процесу згинання та приклеювання клапанів інтегральних обкладинок (табл. 1).

Для наочного аналізу отриманих аналітичних залежностей та оцінювання впливу основних параметрів процесу на формування згину і клейового з'єднання виконано числове моделювання. Розрахунки проведено для характерного набору технологічних параметрів, наведених у табл. 2, що відповідають умовам виготовлення інтегральних обкладинок.

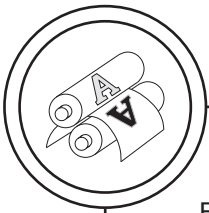
На основі співвідношень (1)–(44) побудовано графічні залежності, які відображають зміну кривини евольвентної поверхні, кута згину клапана, напружено-деформованого стану матеріалу, розподілу пневматичного тиску та коефіцієнта фактичного контакту. Отримані графіки (рис. 2–6) дозволяють встановити характерні закономірності процесу та провести їх подальший інженерний аналіз.



Таблиця 1

Узагальнені технологічні обмеження процесу згинання та приклеювання клапанів інтегральної обкладинки

№	Група обмежень	Математичний вираз	Параметри	Фізичний зміст	Технологічний висновок
1	Умова формування згину	$\theta_f \approx \pi$	θ_f — кінцевий кут згину	Забезпечення повного загину клапана	Необхідно забезпечити достатню довжину контакту L_c
2	Умова міцності матеріалу	$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{доп}}$	σ_{\max} — напруження; $\sigma_{\text{доп}}$ — допустиме	Запобігання тріщинам і пошкодженням	Обмеження кривини та вибір радіуса R_0
3	Обмеження кривини	$\kappa \leq \kappa_{\text{доп}} = \frac{2\sigma_{\text{доп}}}{Et}$	κ — кривина; E — модуль; t — товщина	Контроль інтенсивності деформації	Збільшення R_0 зменшує ризик дефектів
4	Геометрична умова евольвенти	$R_{0\phi} \geq \frac{1}{\kappa_{\text{доп}}}$	R_0 — радіус базового кола; ϕ — параметр евольвенти	Узгодження геометрії інструмента з матеріалом	Мінімальний радіус планки визначається матеріалом
5	Умова адгезійного контакту	$\phi_c \geq \phi_c^{\min}$	ϕ_c — фактичний коефіцієнт контакту, ϕ_c^{\min} — мінімально необхідне значення	Забезпечення достатньої площі контакту	Необхідний рівень тиску притиску
6	Умова міцності клею	$\tau = \frac{P_s}{\phi_c \lambda A_k} \leq \tau_{\text{доп}}$	τ — зсувна напруженість; P_s — сила зсуву; λ — коефіцієнт заповнення; A_k — площа контакту; $\tau_{\text{доп}}$ — допустима зсувна напруженість	Запобігання руйнуванню шва	Збільшення площі контакту підвищує міцність
7	Умова пневматичного притиску	$p \geq p_{\min}^*$	p — середній ефективний тиск у зоні клею; p_{\min}^* — мінімально необхідний тиск	Досягнення необхідного контакту	Рекомендовано 30–50 кПа
8	Кінематична умова	$\frac{d\theta}{dt} = \kappa v$	$\frac{d\theta}{dt}$ — швидкість зміни кута; v — швидкість транспортування	Контроль швидкості деформації	Обмеження швидкості транспортування
9	Умова рівномірності шару клею	$ h_f - h_{\text{ном}} \leq \Delta h_{\text{доп}}$	h_f — фактична (кінцева) товщина клейового шару після притиску; $h_{\text{ном}}$ — номінальна (задана, бажана) товщина клею	Допустиме відхилення товщини клею	Узгодження тиску притиску для забезпечення рівномірної товщини клею в межах допуску



Таблиця 2

Вихідні параметри для числового моделювання процесу згинання та приклеювання клапанів інтегральної обкладинки

R_0	s_0	s_{end}	E	t	p_{in}	p_{out}	L_p	α	γ_p
25 мм	1 мм	20 мм	3 ГПа	0,30 мм	50 кПа	10 кПа	20 мм	$2 \cdot 10^{-4} \cdot 1/\text{Па}$	0,8

Як видно з рис. 2, кривина евольвентної поверхні має максимальне значення на початку контактної зони та монотонно зменшується зі збільшенням довжини дуги. Такий характер зміни забезпечує поступове зниження інтенсивності деформації клапана в процесі його згинання.

Отримана залежність підтверджує, що використання евольвентного профілю дозволяє реалізувати режим плавного навантаження матеріалу, що сприяє зменшенню концентрації напружень у критичній зоні початку згину та підвищує якість формування фальца.

З рис. 3 видно, що кут згину клапана зростає монотонно вздовж довжини контактної зони, досягаючи максимального значення в її кінці. Такий характер зміни відповідає інтегральному ефекту накопичення кривини вздовж довжини контакту.

Поступове формування кута згину свідчить про відсутність локальних різких перегинів, що є важливим для запобігання утворенню заломів і пошкодженню декоративного шару інтегральної обкладинки.

Як показано на рис. 4, максимальні згинальні напруження виникають на початковій ділянці контакту клапана з евольвентною поверхнею, після чого їх значення поступово зменшується. Це зумовлено високими значеннями кривини на вході в зону згину.

Такий розподіл напружень є характерним для процесу згинання за евольвентним законом і дозволяє обмежити максимальні напруження в матеріалі на рівні, що не перевищує допустимих значень, забезпечуючи відсутність пластичних деформацій і пошкоджень структури матеріалу.

З рис. 5 видно, що розподіл пневматичного тиску вздовж зо-

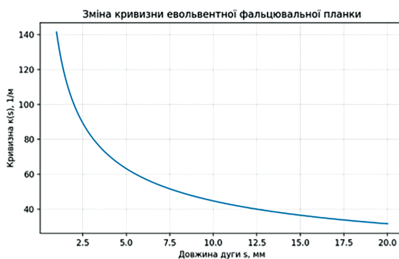


Рис. 2. Залежність кривини евольвентної фальцювальної планки $\kappa(s)$ від довжини дуги контакту s

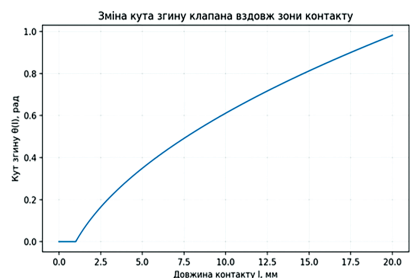


Рис. 3. Зміна кута згину клапана $\theta(l)$ уздовж довжини контактної зони

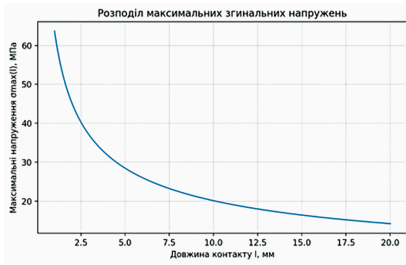
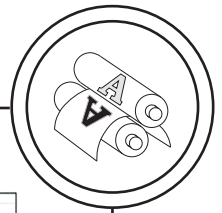


Рис. 4. Розподіл максимальних згинальних напружень $\sigma_{\max}(l)$ уздовж зони контакту клапана

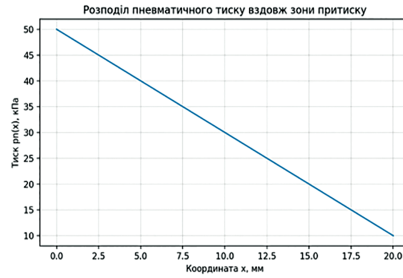


Рис. 5. Розподіл пневматичного тиску $p_n(x)$ вздовж зони притиску

ни притиску має лінійний характер, з поступовим зменшенням від значення на вході до значення на виході з робочої зони.

Такий розподіл забезпечує більш рівномірне ущільнення клейового шару та сприяє стабілізації його товщини, що є важливим для досягнення однорідності клейового з'єднання та запобігання локальним дефектам у вигляді хвиль або вм'ятин.

Як видно з рис. 6, коефіцієнт фактичного контакту зростає за експоненціальним законом зі збільшенням середнього тиску, причому при досягненні певного рівня тиску спостерігається насичення залежності.

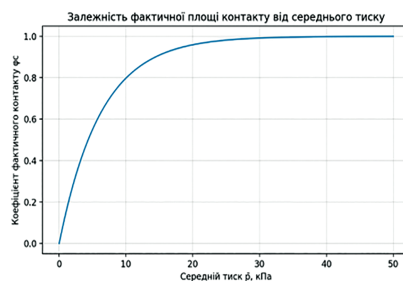
Це означає, що подальше підвищення тиску понад певне значення не призводить до суттєвого збільшення площі фактичного контакту, що дозволяє визначити оптимальний діапазон робо-

чих тисків, за якого забезпечується висока якість клейового з'єднання без перевантаження системи.

Комплексний аналіз отриманих залежностей (рис. 1–5) свідчить про взаємопов'язаний вплив геометрії евольвентної фальцювальної планки, параметрів транспортування та умов пневматичного притиску на формування згину та якість клейового з'єднання клапанів інтегральної обкладинки. Зокрема, зменшення кривини вздовж довжини контакту забезпечує поступове формування кута згину та сприяє зниженню максимальних напружень у матеріалі, тоді як характер розподілу пневматичного тиску визначає ступінь ущільнення клейового шару та ефективну площу контакту.

Отримані результати підтверджують, що узгоджений вибір геометричних параметрів планки,

Рис. 6. Залежність коефіцієнта фактичного контакту φ_c від середнього тиску в зоні приклеювання





довжини контактної зони та режимів притиску дозволяє забезпечити одночасне виконання умов міцності, геометричної стабільності та адгезійної надійності, що є визначальним для підвищення якості виготовлення інтегральних обкладинок.

На основі отриманих результатів встановлено: доцільно використовувати евольвентні профілі; радіус R_0 має бути не менше 20–25 мм; необхідно забезпечити достатню довжину контакту; рекомендований тиск: 30–50 кПа.

У роботі вперше розроблено інтегровану математичну модель процесу згинання та приклеювання клапанів інтегральної обкладинки, яка об'єднує геометричний опис евольвентної фальцювальної планки, кінематичні залежності формування згину та модель напружено-деформованого стану матеріалу з урахуванням умов формування клейового з'єднання.

Вперше отримано аналітичні залежності, що встановлюють взаємозв'язок між геометричними параметрами евольвентного профілю (радіус базового кола, довжина дуги контакту), кінематикою процесу згинання (кут згину, швидкість деформації) та напруженим станом клапана, що дозволяє визначити область допустимих режимів роботи фальцювального пристрою.

Набули подальшого розвитку підходи до математичного опису формування клейового з'єднання в інтегральних обкладинках шляхом урахування впливу розподілу пневматичного тиску, коефіцієнта фактичного контакту та жорсткості системи «клапан—клей—основа» на ефективну площу контакту і міцність з'єднання.

Вперше обґрунтовано систему технологічних обмежень, що забезпечують одночасне виконання критеріїв міцності, геометричної стабільності та адгезійної надійності інтегральної обкладинки, яка може бути використана для інженерного проектування фальцювальних планок і вибору раціональних режимів роботи обладнання.

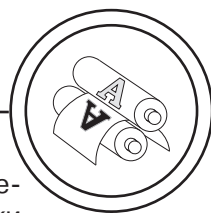
Висновки

1. Розроблено геометричну модель евольвентної фальцювальної поверхні та отримано аналітичні залежності для визначення її кривини вздовж довжини контактної зони. Встановлено, що кривина евольвенти монотонно зменшується зі збільшенням довжини дуги, що забезпечує плавний характер деформування матеріалу клапана.

2. Побудовано кінематичну модель процесу згинання клапана інтегральної обкладинки, яка дозволяє визначити закон зміни кута згину вздовж контактної зони та в часі. Показано, що геометрія евольвентного профілю безпосередньо визначає характер формування кута згину та забезпечує його поступове зростання без локальних перегинів.

3. Досліджено напружено-деформований стан клапана при згинанні та встановлено умови обмеження напружень і кривини. Отримано аналітичні залежності для визначення допустимих геометричних параметрів фальцювальної планки, що запобігають пластичним деформаціям і пошкодженням обкладинки.

4. Розроблено математичну модель формування клейового з'єднання з урахуванням геоме-



трі нанесення клею, пневматичного тиску, фактичного контакту та жорсткості системи. Встановлено умови міцності шва й рівномірності товщини, а також залежності між параметрами притиску та площею контакту.

5. Проведено числове моделювання, яке дозволило визна-

чити вплив ключових параметрів процесу на характеристики згинання і приклеювання. Сформовано систему технологічних обмежень і область допустимих параметрів, що забезпечують міцність, геометричну стабільність та адгезійну надійність обкладинки.

References/Список використаної літератури

1. Jina, W., Nagasawa, S., Yamamoto, T., & Nagumo, T. (2023). Analysis of the folding behavior of a paperboard subjected to indentation of a deviated creasing rule using the finite element method. *AIMS Materials Science*, 10(2), 313–341. <https://doi.org/10.3934/materci.2023017> [in English].

2. Baumann, G., Czibula, C., Hirn, U., & Feist, F. (2025). The tensile behaviour of paper under high loading rates. *Cellulose*, 32(2), 1201–1219. <https://doi.org/10.1007/s10570-024-06266-0> [in English].

3. Boman, G., Starkenberg, S., Wennerholm, S., Wallin, M., Borgqvist, E., Bergvall, E., & Ristinmaa, M. (2025). Statistical volume element generation for paperboard based on X-ray computer tomography images. *International Journal of Solids and Structures*, 320, 113446. <https://doi.org/10.1016/j.ijssolstr.2025.113446> [in English].

4. Kmita-Fudalej, G., et al. (2022). Bending stiffness of honeycomb paperboard. *Materials*, 16(1), 156. <https://doi.org/10.3390/ma16010156> [in English].

5. Kmita-Fudalej, G., et al. (2024). Method for calculating the bending stiffness of honeycomb paperboard. *Materials*, 17(4), 878. <https://doi.org/10.3390/ma17040878> [in English].

6. Abbès, B., Abbès, F., Dao, L. T., Duong, P. T. M., & Luong, V. D. (2025). Studying the behavior of a paperboard box: Experiment and finite element model. *Vibration*, 8(2), Article 23. <https://doi.org/10.3390/vibration8020023> [in English].

7. Jasiólek, A., Wolf, A., Bishara, N., & Rosendahl, P. L. (2024). Adhesive paperboard connections in architectural applications: modelling, characterization, and performance assessment. *The Journal of Adhesion*, 1115–1142. <https://doi.org/10.1080/00218464.2024.2420895> [in English].

8. Gavva, O., Sokolskyi, O., & Herasymenko, Y. (2024). Determination of opening force of hot-melt adhesive joints in flexible packaging. *Ukrainian Food Journal*, 13(4), 766–779. <https://doi.org/10.24263/2304-974X-2024-13-4-10> [in Ukrainian].

9. Ries, M. (2024). Mechanical behavior of adhesive joints: A review on modeling techniques. *Computer Methods in Materials Science*, 24(4), 1010, 5–35. <https://doi.org/10.7494/cmms.2024.4.1010> [in English].

10. Pasanec Preprotić, S., Vukoje, M., Petković, G., & Rožić, M. (2023). Novel approaches to enhancing sustainable adhesive system solutions in contemporary book binding: An overview. *Heritage*, 6(1), 628–646. <https://doi.org/10.3390/heritage6010033> [in English].

*Corresponding author: **Vasyl Strutynskyi**, Doctor of Technical Sciences, Professor, National Technical University of Ukraine 'Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute', kvm_mmi@ukr.net, <https://orcid.org/0000-0001-7167-0085>.



Integrated Mathematical Model of Bending and Adhesive Bonding Processes in Integral Covers with Involute Folding Profiles

The object of the study is the process of bending and adhesive bonding of flaps of an integral cover using involute-profile folding plates under pneumatic pressure conditions. The aim of the work is to develop an integrated mechanical-mathematical model describing the interaction between the geometric parameters of the folding plate, the kinematics of the bending process, the stress-strain state of the material, and the conditions of adhesive joint formation, in order to improve the quality of integral cover forming.

To achieve this aim, a geometric model of the involute surface of the folding plate was developed, analytical relationships for determining curvature along the contact length were obtained, and a kinematic model of the flap bending angle evolution was formulated. A mathematical description of the stress-strain state of the material was developed, allowing the determination of admissible values of curvature and stresses. A model of adhesive joint formation was proposed, taking into account the glue application geometry, the distribution of pneumatic pressure, the real contact ratio, and the stiffness of the 'flap-adhesive-substrate' system. Analytical relationships were derived to determine the strength conditions of the adhesive joint and the geometric uniformity of the cover. Numerical simulations were performed to evaluate the influence of key process parameters (involute radius, contact length, transport speed, and pneumatic pressure level) on the bending and bonding characteristics.

It was established that the use of an involute profile ensures a monotonic decrease in curvature along the contact length, reducing stress concentration and preventing defects in the folding zone. It was shown that the bending angle forms gradually without local kinks, while maximum stresses are concentrated at the initial contact zone and do not exceed admissible values under rational geometric parameters. The real contact ratio was found to increase with pneumatic pressure according to an exponential law with saturation, allowing the determination of an optimal operating pressure range. A system of technological constraints was substantiated to ensure the simultaneous fulfillment of strength, geometric stability, and adhesion reliability requirements of the integral cover.

The results can be applied in the engineering design of folding-gluing modules and in the optimization of printing equipment operating modes for integral cover production, aiming to improve product quality, reduce defects, and ensure process stability.

Keywords: integral covers; profile folding strips; involute profile; mathematical modeling; kinematic parameters; adhesive connection; stress-strain state; geometric synthesis.

Надійшла до редакції/Received: 12.01.26

Рецензія/Peer review: 25.01.26

Опубліковано/Printed: 10.04.26